Tenkere

en samling av aktiviteter som utfordrer til matematisk tenkning

Forord

Matematikk er langt mer enn beregninger. Matematisk kompetanse handler om å kunne forstå, anvende, resonnere, argumentere, finne strukturer og logiske mønstre, samt mye mer. Dessverre er det altfor mange mennesker som slutter å tenke når de jobber med matematikk. De blir i stedet opptatt av å utføre metoder de en gang har lært, og stopper ikke opp for å tenke over hvordan eller hvorfor denne metoden fungerer.

Matematikk bør først og fremst handle om å være aktive tenkere. En kalkulator eller annen avansert programvare kan utføre kompliserte beregninger raskt, men de har ikke den samme muligheten til refleksjoner som det vi mennesker har. Vi trenger derfor å utvikle en matematisk kompetanse som gjør oss i stand til å utnytte teknologien på en god måte og samtidig være aktive tenkere.

Utfordringen er hvordan vi kan legge til rette for at elever og studenter er aktive tenkere når de jobber med matematikk. Dette heftet viser med enkle grep hvordan vi kan formulere spørsmål innenfor alle matematiske temaer og nivå, som tvinger den som svarer til å være en aktiv matematisk tenker. Derfor er også dette heftet et kraftfullt verktøy for å utfordre elever og studenter til å tenke matematikk.

Jeg har selv brukt heftet Tenkere sammen med lærerstudenter, ingeniørstudenter og matematikkstudenter ved Universitetet. Lærerstudentene har i tillegg brukt heftet og ideene ute i skolene i praksis. Alle steder skaper disse spørsmålsformuleringene engasjement og matematiske diskusjoner. Det er enkelt å komme i gang med, og det skaper et hav av muligheter.

Fordi vi har sett hvor stor verdi heftet Tenkere kan ha matematikk-klasserom, så har vi i MatRIC ønsket å gjøre dette heftet tilgjengelig her i Norge. Derfor har vi kjøpt rettighetene og fått det oversatt til norsk, slik at vi kan legge det ut for alle de som har behov for det her i Norge. Vi håper dere har like stor glede av dette heftet som det vi har hatt, og at det kan inspirere til mange gode matematiske refleksjoner og diskusjoner.

Linda G. Opheim,

Leder av MatRIC sitt nettverk for lærerutdanningene

Tenkere

Laget og kompilert for ATM Av Chris Bills, Liz Bills, Anne Watson & John Mason

Introduksjon ... 3

Hvordan kan vi generalisere (på en nyttig måte) i matematikk? ... 3

Aktivitetene ... 4

1. Gi et eksempel på … (enda et, og enda et) ... 6
2. Peker mot generalitet (spesielt, særegent, generelt) ... 9
3. Vanskelig og enkelt ... 10
4. Tilleggsvilkår ... 12
5. Sammenligning/tre kontrasterende ... 14
6. Forvirrende forventninger ... 16
7. Umulige konstruksjoner ... 17
8. Umiddelbar generalisering ... 18
9. Åpne og lukkede spørsmål / uttømmende lister ... 19
10. Alltid, noen ganger, aldri sant ... 20
11. Hvem skal ut? ... 21
12. Sortering ... 23
13. Organisere i rekkefølge ... 24
14. Ekvivalente utsagn ... 25
15. Medstrøm eller kryssende? ... 26
16. Begrave beinet ... 27

Bruke “tenkere” i form og rom ... 28

Hva nå? ... 34

Hva nå? - Få dem til å tenke ... 36

Nyttige referanser og videre lesning ... 37

Index ... 38

Dette heftet har som mål å gi ideer til klasseroms-aktiviteter som stimulerer til matematisk tenking. Alle oppgavene ber den lærende om å lage eller håndtere noen matematiske objekter som eksemplifiserer et konsept eller en teknikk. Vi ser eksemplifisering og generalisering som viktige aspekter ved matematisk tenkning, og som eksisterer i hjertet av å «gjøre matematikk». Når elevene begynner på skolen, har de allerede blitt eksponert for kraften av generalisering og eksemplifisering. Spørsmålet er hvordan man kan få elever til å utnytte disse forutsetningene i matematikkundervisningen. For å kunne tilrettelegge at elevene kan få å delta i matematisk tenking foreslår vi her noen inngangsporter til klasseromsdiskusjon. Alle disse generaliserings-genererende aktivitetene kan lærere utnytte for å få elevene til å generalisere. I noen av disse aktivitetene er det faktisk umulig for elevene å ikke generalisere, selv om det kan være at de trenger hjelp til å artikulere generaliseringen verbalt eller med å uttrykke dem skriftlig, i diagrammer eller med symboler.

Tanken vår er at man kan danne et grunnlag for at elevene kan lære å kjenne igjen, å klare å uttrykke og å sette pris på generalitet, ved å få dem til å generere eksempler. Når læreren presenterer noen eksempler illustrerer dette lærerens forståelse, og for elevene kan disse eksemplene virke tilfeldig valgt. Ved å oppmuntre elevene til å eksaminere likheter og ulikheter i et eksempelrom, kan man få dem til å legge merke til variasjonen innenfor det området og elevene kan få muligheten til å uttrykke hva som er invariant. Samtaler i klasserommet som fokuserer på likheter og ulikheter gjør at elevene utvikler konsepter, og det innebærer en prosess hvor man går mer og mer over til det abstrakte. Slike typer dialoger kan i minste fall lede til algebraisk symbolisering av «regler» i matematikken, og i beste fall kan det gi kontakt med essensen av matematikk.

Hvordan kan vi generalisere på en matematisk nyttig måte

Hvis unge elever kun har vært borti trekanter som er likesidede, eller som kommer i forskjellige farger, eller alltid er laget av plastikk, er det usannsynlig at generalisering av trekanter inkluderer trekanter i forskjellige former. Det er heller ikke sannsynlig at man er klar over at trekantens farge og «tykkhet» ikke er matematiske egenskaper. Elever trenger oppgaver som hjelper dem til å se forskjeller matematisk, og som hjelper dem med å utvide deres eksempelrom.

Det er først når man begynner å se hva som er forskjellig matematisk mellom objekter som har samme merkelapper, at vi begynner å legge merke til viktige likheter. Hvis man for eksempel kun ser læreren løse uttrykket $2x + 1 = 7$, så vil man aldri kunne forstå de generelle prosessene som blir undervist (spesielt hvis vi allerede vet at x må være 3 ut ifra egen logisk tenking.) Dersom det istedenfor er mange forskjellig eksempler på uttrykk hvor $x=3$, begynner det å bli mer interessant. Hvis det i tillegg er mange eksempler som ser litt ut som $2x + 1 = 7$, men som har forskjellige verdier for x, er det mer av interesse å finne ut. Uansett hvordan elevene forstår dette, så er sjansen stor for at de vil skille mellom matematiske egenskaper fordi det er matematisk variasjon de møter i oppgaven.

For å designe oppgavene nedenfor har vi utnyttet at ethvert matematisk emne, struktur, påstand, eller uttrykk inneholder et utvalg av dimensjoner av variasjon, og hver dimensjon har et tilhørende utvalg av tillatt endring. Vanligvis holder elevene seg innenfor trygge rammer av endringer, og går ikke utover det kjente med mindre de blir oppmuntret og støttet til å gjøre det; noen av de instruksjonene vi tilbyr her i dette heftet arbeider med nettopp dette aspektet av matematisk kreativitet. Elever er gjerne ikke kjent med de samme dimensjonene av variasjon som læreren: for eksempel kan læreren sin idé være å variere vinklene til en trekant, mens eleven gjerne tenker på å variere linjebredden. Noen av instruksjonene nedenfor jobber med å utvide elevens repertoar av variasjon.

Tenk deg at du lager et diagram for elevene for å visualisere hvordan objekter speiles om en rett linje; hvor mange dimensjoner av mulige variasjoner finnes det? Burde det være en tegning av et kjent objekt, en abstrakt form, en geometrisk definert figur, eller hva? Burde den bestå av bare rette linjer, eller noen kurvede? Bør speilingslinjen være vannrett, loddrett eller verken eller? Burde speilingslinjen være på kanten av formen, gjennom formen, utenfor formen, parallelt med den ene kanten eller ingen av disse tilfellene? Skulle hele diagrammet vært plassert i et koordinatsystem, med hjørner bare på heltallskoordinater, eller ikke? Svar på disse spørsmålene vil avhenge av hva som er formålet ditt. Hva ville du valgt hvis du ville at elever skulle lære om forholdet mellom refleksiv transformasjon og symmetriske figurer? Som lærer velger du dimensjonene av variasjon som du ønsker å presentere for det gitte formålet, men elevene kan ha helt andre ideer om hvilke dimensjoner av mulig variasjon som eksisterer. Oppgaver som de i dette heftet avslører både hvilke dimensjoner av variasjon elevene er klar over, og oppgavene utfordrer dem til å utvide deres horisont. Ved å velge å gi elevene spesifikke oppgaver kan du bevisst og vellykket lede elevenes oppmerksomhet dit du synes det er mest hensiktsmessig matematisk.

Hvis du bevisst ber elevene lage egne eksempler ved å variere dimensjonen du ønsker at de skal være oppmerksomme på, eller ved å skyve dem forbi deres «trygge» endringsområde, kan du sørge for at de oppdager de strukturene som du ønsker at de skal lære om. Hvis målet er at elevene skal utvikle generelle strategier for å finne ut hvordan objekter reflekteres avhengig av hvor speillinjen er, kan det å få dem til å utforske refleksjoner av samme form, men med forskjellige speillinjer, være en fornuftig måte å starte på. De vil nesten bli tvunget til å generalisere for å forstå hva de forskjellige resultatene gir. Slik vi ser det, er det ikke er behov for å undervise i «generalisering»; det er det vi alle gjør hele tiden uansett.

Aktivitetene

Aktivitetene vi foreslår her går på tvers av alle mål og emner. Vi har prøvd å komme med forslag til alle områdene innenfor matematikken. Vi håper at leserne vil sette pris på at selv om dette omfanget innebærer at ikke alle eksemplene kan brukes direkte i ens eget klasserom, så indikerer det at tilnærmingen er anvendelig for alle nivå. Eksemplene våre er ment å illustrere seksten forskjellige klasser av spørsmål, oppgaver eller instruksjoner som alle inviterer elevene til å engasjere seg i ulike matematikkområder. Disse kan brukes som utgangspunkt for å finne på egne ideer som er tilpasset klassen og temaet du skal undervise i.

Spørsmålene, oppgavene eller instruksjonene under hver av de seksten overskriftene er arrangert i en tilnærmet rekkefølge etter hvordan elevenes nivå utvikler seg fra barneskolen til videregående. Dersom man underviser noe eldre elever kan man med fordel bruke noen av de "enklere" aktivitetene for å utvikle elevenes evner til å generalisere først i emner de er kjent med. For yngre elever kan man bruke noen aktiviteter relatert til matematikk områder som de enda ikke har blitt kjent med, for å utfordre dem og for å stimulere til læring. De er nummerert bare for å ha et system på oppgavene, slik at man enkelt kan referere til dem. Det er ikke nødvendig å gjøre dem i en bestemt rekkefølge.

Etter å ha presentert de seksten forskjellige typene spørsmål, oppgave eller ledetekst, gir vi et eksempel på en oppgavestreng som kan bidra til elevens progresjon mot et formelt geometrisk bevis. Dette finner du i kapittelet «Hvordan bruke 'Tenkere' i form og rom». Denne oppgavestrengen kan brukes på tvers av klassetrinnene, fordi det som utvikles er elevenes evne til å stille spørsmål og skape i matematikk gjennom å generalisere fra eksempler.

Vi refererer til de seksten typene ved disse navnene:

1. Gi et eksempel på … (enda ent, og enda et)
2. Peker mot generalitet (spesielt, særegent, generelt)
3. Hardt og enkelt
4. Tilleggsvilkår
5. Sammenligning/tre kontrasterende
6. Forvirrende forventninger
7. Umulige konstruksjoner
8. Umiddelbar generalisering
9. Åpne og lukkede spørsmål / uttømmende lister
10. Alltid, noen ganger, aldri sant
11. Ut med den som skiller seg ut
12. Sortering
13. Plassere i rekkefølge
14. Ekvivalente utsagn
15. Med og over kornet
16. Begrave beinet

Å gi merkelapper i form av navn til ulike spørsmålstyper kan være nyttig, ettersom at man gjerne kommer til å huske på merkelappen midt i en situasjon som oppstår, noe som gjør at kan benytte den spesifikke typen spørsmål i den gitte situasjonen. Til å begynne med er nok navnene på kategoriene fremmede, og du ønsker gjerne å erstatte dem med dine egne; men når en tittel har blitt tilknyttet en rik samling av hendelser og erfaringer med bruk av spørsmålene kategorien inneholder, vil tittelen bidra til å minne deg på den spørsmålene i situasjoner hvor du trenger dem. Titlene gjør det også mulig for lærere og elever å reflektere over og snakke med hverandre om bruken av disse spørsmålene, og om forskjeller og likheter i tenkningen som kreves for å besvare dem.

1. Gi et eksempel på ... (enda et, og enda et)

Instruksjonen "gi et eksempel på ..." starter med en generalisering og ber elevene gi spesielle eksempler på det generelle. Elevene blir deretter bedt om å si hva som er likt med alle eksemplene. Man kan komme med enda flere eksempler, og sørge for mer tenking, ved å først spørre etter et eksempel (og gi dem tid til å komme med et/konstruere et), og så be dem om å komme med enda et eksempel, og etter det komme med enda et eksempel.

Gi, finn, konstruer et eksempel på:

1. To tall som har differanse lik 2; og enda et; og enda et.

Oppgaveformatet "... og enda et, og enda et..." kan føre til mange forskjellige reaksjoner. Noen mennesker skriver det første de kommer på, noen har en mer systematisk tilnærming for å generere det andre og tredje eksempelet, noen lager eksemplene gradvis mer og mer komplekse, noen forsøker å generalisere.

Som lærere kan vi hjelpe elevene til å utvikle deres evner til å generalisere ved å ikke bare å fokusere på det som er likt i alle eksemplene eleven har konstruert, men ved å spørre hvordan de kom frem til de eksemplene.

Etter hvert eksempel de kommer med kan vi spørre "hvordan har du laget dette eksempelet?". Så i dette tilfellet blir det "Hvordan kan man finne to tall som har 2 i differanse?"

Noen starter gjerne med et tall, og legger til 2, slik at x og x+2 har differanse lik 2
Eller man kan starte med et tall, og trekke fra to, slik at x og x-2 har differanse lik 2
Eller man kan gå til hver av sidene av et tall, slik at x-1 og x+1 har differanse lik to.
Eller...

Det er verdt å ta i betrakting at " ... en differanse lik 2" kanskje ikke oppfordrer til generalisering (folk flest vet bare at to tall har differanse lik 2 uten å tenke særlig mye over det) – da kan man prøve å spørre etter "et tallpar som har differanse lik 2,68". Dette gjør at man gjerne blir nødt til å tenke mer over det, for å komme på et eksempel på et slikt tallpar. Dette kan altså lede i større grad lede til en generalisering, enn et "enklere" spørsmål.

I denne delen vil vi vise til mange variasjoner av denne typen spørsmål, for å illustrere hvordan de andre 15 typene spørsmål kan varieres på lignende måter.

Lærere kan opprette et nytt utgangspunkt ved å sette i gang prosessen "hva hvis ikke...?". Det kan være nyttig å gjøre elevene bevisst på den prosessen med å endre enkelte aspekter, for å åpne for dialog rundt dimensjoner av variasjon. For å få elevene til å bli flinkere til å se mulige variasjoner, kan man spørre "Hva kan varieres i det opprinnelige spørsmålet?", slik at elevene gjerne selv begynner å stille seg dette spørsmålet.

Hva hvis det ikke var snakk om "differanse"?

Gi, finn, konstruer et eksempel på:

2. to tall som har **sum** lik 2; og enda et, og enda et.
3. to tall som har **produkt** lik 2; og enda et, og enda et.

4. to tall som har **kvotient** lik 2; og enda et, og enda et.

Hva hvis ikke tallet er 2?

Gi, finn, konstruer et eksempel på:

5. to tall som har sum (differanse, produkt, kvotient) lik 2,68; og enda et, og enda et.
6. to tall som har sum (differanse, produkt, kvotient) lik 3/4; og enda et, og enda et.
7. to tall som har sum (differanse, produkt, kvotient) lik -0,2; og enda et, og enda et.

Hva hvis det ikke er et par av tall?

Gi, finn, konstruer et eksempel på:

8. et sett av **tre** tall som har sum lik 0; og enda et, og enda et.

Hva hvis det ikke er snakk om tall?

Gi, finn, konstruer et eksempel på:

9. et par av **figurer** som har areal med differanse (sum) lik 2; og enda et, og enda et.
10. et par av **likninger** som har løsninger med differanse lik 2; og enda et, og enda et.
11. to sett med **data** hvor gjennomsnittet har en differanse lik 2; og enda et, og enda et.
12. to linjer hvor **gradene/punktene** har differanse lik 2; og enda et, og enda et.
13. to endelige **integraler** som har differanse lik 2; og enda et, og enda et.
14. et par av **komplekse tall** hvor modulene har differanse lik 2; og enda et, og enda et.

Her er noen flere enda et, og enda et utgangspunkt:
Gi, finn, konstruer et eksempel på:

15. et tall som avrundes til 3,5 (til nærmeste tidel); og enda et, og enda et.
16. en figur med et par parallelle sider; og enda et, og enda et.
17. en figur med et areal lik 7; og enda et, og enda et.
18. en figur med en omkrets lik 7; og enda et, og enda et.
19. et sett med tall som har gjennomsnitt lik 5; og enda et, og enda et.
20. en hendelse der sannsynligheten er 1/6 ; og enda et, og enda et.
21. et lykkehjul der sannsynligheten for å få 2 er dobbelt så stor som 4
22. en enhetsbrøk som er lik summen av to enhetsbrøker; og enda et, og enda et.
23. en tredimensjonal figur med 12 som volum.
24. gjennomsnittlig fart og tid som kan brukes til å reise 1200 km; og enda et, og enda et.
25. en formel som har verdien 7 når $a = 2$ og $b = 3$; og enda et, og enda et.
26. et par punkter der midtpunktet er (2,3); og enda et, og enda et.
27. en ligning til en rett linje som går gjennom (2,3); og enda et, og enda et.
28. et punkt (x,y) slikt at $3x + 4y = 32$; og enda et, og enda et.
29. en rettvinklet trekant der hypotenusen er lik 5; og enda et, og enda et.
30. et punkt som har avstand lik 3 fra punktet (4,5); og enda et, og enda et.

31. en vinkel der sinus er 0,5; og enda et, og enda et.
32. et område dannet av x-aksen, y-aksen og en linje som går gjennom (5,3); og enda et, og enda et.
33. en tallfølge som ikke er en geometrisk rekke.
34. en funksjon som skjærer punktet (2,3); og enda et, og enda et.
35. en funksjon hvor den deriverte er lik 2x; og enda et, og enda et.
36. en funksjon hvor når x = 0 er den deriverte lik null; og enda et, og enda et.
37. en tallfølge hvor grenseverdien er lik 2; og enda et, og enda et.
38. tre krefter hvor resultatet er lik 0 (to, tre, fire, fem krefter osv.); og enda et, og enda et.
39. et komplekst tall der modulusen og argumentet har samme tallverdi.
40. en logaritme som er lik log224; og enda et, og enda et.
41. et par funksjoner der f x g = g x f for alle x-verdier; og enda et, og enda et.
42. en matrise hvor determinanten er lik 6; og enda et, og enda et.
43. en sammensatt funksjon som består av cos, sin og ln som har verdien 1 eller 0 når x=1; og enda et, og enda et.

Merk at subtile forskjeller i oppgaver kan fremme ulike svar hos elevene. Tenk for eksempel på forskjellen i svaret ditt på disse instruksjonene:

- Skriv ned tre eksempler på subtraksjoner.
- Skriv ned tre subtraksjoner med løsninger.
- Skriv ned tre veldig forskjellige eksempler på subtraksjoner.
- Skriv ned så mange forskjellige typer subtraksjoner som du kan komme på.
- Skriv ned en vanskelig subtraksjon og en enkel subtraksjon.
- Skriv ned en subtraksjon som du ville brukt for å forklare ideen til en yngre person.
- Skriv ned flere eksempler på subtraksjoner.
- Skriv ned en subtraksjon som inneholder tall som har forskjellige siffer.
- Skriv ned en subtraksjon hvor en eller begge tallene har tallet 0 i seg.

Det er verdt å tenke over hvordan små endringer i instruksjoner/spørsmål vil lede til ulike svar i hver av aktivitetene våre.

2. Peker mot generalitet (spesielt, særegent, generelt)

Elever kan også bli ført mot generalisering ved først å bli bedt om gi et bestemt og deretter et merkelig/rart eksempel. Når de har blitt vant til å finne spesielle eksempler, kan de også bli oppfordret til å forsøke å si noe om på hvilken måte et eksempel er generisk, og å uttrykke formen til et generelt eksempel. For eksempel:

Gi meg et eksempel på en brøk som er ekvivalent til ⅔.

Gi meg et merkelig/rart eksempel.

Gi meg et generelt eksempel.

Gjennom å tenke på det særegne kan man bli mer bevisst på det generelle. For å lage flere og enda mer særegne eksempler må man doble telleren og tredoble nevneren. For eksempel 2 milliarder over 3 milliarder, eller 2 x 3,22 over 3 x 3,22 eller 2 x pi over 3 x pi. I klasserommet kan elever konkurrere om å gjøre eksemplene mer og mer særegne - teller og nevner kan være heltall, desimaler, brøker, algebraiske uttrykk ...

Herfra er det er kort steg videre til et uttrykk for det generelle: "2 ganger noe over 3 ganger noe er en brøk ekvivalent til ⅔" eller "2x/3x er ekvivalent til ⅔ for alle verdier av x unntatt 0."

Her er noen flere utgangspunkt for SSG (spesielt, særegent, generelt) formen:

Gi meg et eksempel, et særegent eksempel, et generelt eksempel, på

1. et partall.
2. et tall med akkurat tre faktorer.
3. et tall som har 1 i rest når det deles på 3.
4. et parallellogram.
5. en brøk ekvivalent til 0,2.
6. en brøk større enn 3.
7. en figur med to rotasjonssymetrier
8. en algebraisk brøk som er ekvivalent til a/b.
9. en kvadratisk likning med rot lik 2.
10. en rettlinjet graf.
11. en vinkel hvor cosinus er 0,5.
12. en odde funksjon

... alle "Gi et eksempel ... enda et, og enda et"-oppgavene kan også gjøres i SSG format.

3. Vanskelig og enkelt

Gi et eksempel som er veldig vanskelig eller komplisert og et som er enkelt. Hva er det som gjør dem vanskelige eller enkle? Eksemplene elevene velger avslører mye om det de synes er vanskelig, og det er ikke alltid begrepene som er grunnen til at det er vanskelig. For eksempel, så kan de føle seg trygge på trigonometriske forhold, men streve med å anvende algebraisk manipulasjon for å utnytte dem. Et annet eksempel er at de kan føle seg trygge på å løse lineære likninger som involverer heltall, men synes at det blir utfordrende med en gang det involveres desimaler eller brøker.

Gi et enkelt eksempel på, og et vanskelig eller komplisert eksempel på

1. en beregning som har svaret 7.
2. en tresifret subtraksjon.
3. en divisjon med nuller i dividenden.
4. brøk som skal subtraheres eller divideres
5. et sett med tall som skal plasseres i rekkefølge.
6. et tekstproblem.
7. en beregning som skal gjøres med kalkulator.
8. en utregning der svaret er et tall
9. en utregning med prosent.
10. en figur bestående av rektangler, der man skal finne arealet og omkretsen til figuren
11. en polygon hvor man skal finne gradene til indre vinkler.
12. en sekvens hvor man skal finne det n-te leddet?
13. et spørsmål som involverer forhold.
14. en formel som skal bli evaluert.
15. et uttrykk som skal forenkles ved å trekke sammen like ledd.
16. en lineær likning som skal løses.
17. en figur bestående av sirkelbuer og sirkelsektorer, der man skal finne arealet og omkretsen til figuren.
18. et sannsynlighetsspørsmål som involverer kombinerte hendelser.
19. en kvadratisk likning å løse.
20. et likningssett med to ukjente som skal løses
21. et sett med data som man skal lage histogram av.
22. bruk av sinus regelen til å løse en trekant.
23. grafen til en funksjon der du skal skissere den inverse grafen.
24. en likning som skal løses ved gjentagende metode (newtons metode til å løse likninger)
25. et polynom å derivere.
26. et plan som er gitt ved en normalvektor.
27. en differensialligning som skal løses

28. en utregning av massesenter.
29. et omdreiningslegeme

"Å finne et vanskelig eksempel" kan brukes til å vurdere omfanget av elevens forståelse, men det er også en verdifull læringsopplevelse for eleven som oppmuntrer til å utvide grensene for hva de tror er mulig. Det kan også være nyttig for dem for å forberede seg på å gjenkjenne hvilke teknikker som vil være passende i nye situasjoner, for eksempel slike som dukker opp i eksamenssituasjoner. Elever som er vant med å finne frem til vanskelige eksempler er kanskje bedre rustet i en eksamenssituasjon, hvor eksaminatoren kommer med et spørsmål som læreren deres ikke hadde tenkt på.

4. Tilleggsvilkår

Å legge til begrensninger kan også føre til matematisk tenking. Her spør vi først etter eksempel med 1 begrensning, og spør videre etter flere eksempler hvor det legges til en ny begrensning for hvert eksempel. Hver påfølgende begrensning kan gjøre at elevene blir mer bevisst på de spesifikke egenskapene ved eksemplene de genererer.

Gi meg et eksempel på

1. et tall som er større enn 2.
   et tall som er større enn 2 og samtidig større enn 5.
   et tall som er større enn 2 og samtidig større enn 5 og også mindre enn 6.
2. et tall som har rest lik 1 når det deles på 2.
   ... og en rest lik 1 når det deles på 3
   ... og rest lik 1 når det deles på 1
3. en brøk som er større enn en halv.
   ... hvor det samtidig er slik at teller og nevner er større enn 5
   ... hvor det samtidig er slik at teller og nevner er (eller ikke er) multipler av det samme tallet
4. et tall som er 0,6 når det rundes om med 1 desimalplass
   ... og er 0,60 når det rundes med 2 desimalplasser
   ... og er 0,600 når det rundes med 3 desimalplasser
5. et sett med tall som har 5 som gjennomsnitt
   ... som har typetallet lik 4
   ... som har median lik 3
   ... som har variasjonsbredde lik 6
6. (for de modige): ... og som har standardavvik lik 1.
7. en firkant med minst to vinkler på 90 grader
   og hvor ikke alle sidene har samme lengde
   og som er speilsymmetrisk om minst én av diagonalene.
8. en trekant med høyde lik 2 enheter
   ... og høyde lik en enhet
   ... og høyde lik tre enheter
9. et punkt (x,y) slikt at 3x+y=32
   ... og x = 2y
10. en parabel som krysser punktet (0,1)
    ... og samtidig krysser punktet (1,2)
    ... og samtidig krysser punktet (0.5,1)
11. en parabel med vendepunkt i (3, -2)
    ... som samtidig krysser punktet (0, 0)
12. en sirkel som berører x-aksen
    ... og y-aksen
    ... og har en radius lik 5
13. en tallfølge med grenseverdi lik 1
    ... og hvor leddene ikke er økende
    ... og hvor leddene ikke er synkende

Og i enkelte tilfeller finnes det kun en løsning med de gitte begrensningene. Vi kan understreke dette ved å vise til en sekvens med lignende spørsmål hvor vi varierer tallene i oppgaven:

14. et tallpar som har sum lik 5 og som har differanse lik 1.
15. et tallpar som har sum lik 5 og som har differanse lik 4.
16. et tallpar som har sum lik 5 og som har differanse lik 0,3.
17. et tallpar som har sum lik 5 og som har differanse lik 7.

Vi kan også redusere alternativene gradvis:

18. et heksagon med seks symmetrilinjer
med bare to symmetrilinjer
med kun en symmetrilinje

eller vi kan gradvis øke mulighetene:

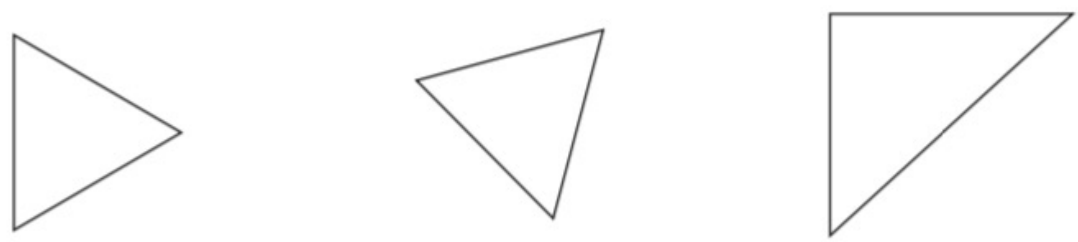
19. et heksagon med bare en symmetrilinje
med bare to symmetrilinjer
med seks symmetrilinjer

5. Sammenligning/tre kontrasterende

Her er ideen at man skal komponere grupper av tre eksempler med noen likheter og noen forskjeller. Ved systematisk sammenligning kan utforsking av likheter fremme generalisering, og ved å også utforske forskjeller fremmes en dypere og mer utvidet forståelse av konseptet.

Velg ut to av disse tre. På hvilken måte er disse like hverandre, og forskjellige fra det tredje objektet/eksemplet?

1. 7,69 7,74 7,75
2. 2, 4, 6, 8, … 2, 5, 8, 11, … 3, 5, 7, 9, …
3.



4. 1:3 1:4 2:6
5.

Størrelse	Frekvens
1	4
2	6
3	10
4	7
5	3

Størrelse	Frekvens
4	3
5	7
6	10
7	7
8	3

Størrelse	Frekvens
4	4
5	10
6	8
7	6
8	2

6. $2x - 7 = 15$ $x^2 = 121$ $2x + 6 = 121$

Alternativt, be elevene om å generere tre eksempler av:

7. Gi et eksempel på et tall som rundes av til 7,7.
og enda et som er forskjellig fra det første
og enda et som er forskjellig fra de to første.

Etter hvert av de følgende, kan læreren spørre "og et annet eksempel som er likt på en eller annen måte, og enda et som på en eller annen måte er forskjellig fra de første to."

8. Gi et eksempel på en tekstoppgave …
9. Tegn et eksempel på en polygon …
10. Gi et eksempel på et spørsmål som involverer prosent …
11. Gi et eksempel på et spørsmål som involverer forhold …
12. Gi et eksempel på en hendelse som har sannsynlighet lik en halv …

13. Gi et eksempel på en tallfølge …
14. Gi et eksempel på en formel som kan forenkles
15. Gi et eksempel på en likning for en rett linje
16. Gi et eksempel på en trekant som skal løses ved bruk av trigonometri …
17. Gi et eksempel på en trekant som skal løses ved bruk av pytagoras Pytagoras' læresetning…
18. Gi et eksempel på en kvadratisk likning
19. Gi et eksempel på et teorem …
20. Gi et eksempel på en vektor …
21. Tegn grafen til en funksjon …
22. Gi et eksempel på en funksjon som kan integreres ved substituasjon
23. Gi et eksempel på en likning for et plan …
24. Gi et eksempel på tre krefter som holder en ting i likevekt …

Disse øvelsene gir en rikere læringsopplevelse for elevene dersom de får muligheten til å dele sine ideer og på denne måten kan de mindre eventyrlystne elevene få tips og ideer fra sine mer utforskende klassekamerater. Lærerrollen her går ut på å hjelpe å trekke frem viktige likheter og forskjeller, som gjerne elevene ikke har tenkt over.

6. Forvirrende forventninger

Når elevene har lært noe om et konsept, kan de utvikle veldig låste ideer om hva som er mulige eksemplifiseringer av konseptet. En kreativ måte å løsne opp i slike snevre oppfattelser er ved å utfordre eleven til å skape noe som høres helt umulig ut for dem. Grunnen til at det virker umulig er nettopp fordi det er utenfor hva eleven forventer at er mulig. De følgende eksemplene innebærer skjulte antagelser om elevenes forventninger av hva som er mulig:

Gi, finn, konstruer et eksempel på:

1. en trekant som ikke har noen kanter som er parallelle til sidene av arket ditt.
2. et tall som forblir likt når det multipliseres med 10.
3. et heksagon uten noen symmetrilinjer.
4. en symmetrisk figur som ikke er regulær.
5. en brøk som er lik et helt tall.
6. et par brøker som har produkt større enn 1.
7. et tallpar som har sum større enn et av tallene og samtidig er mindre enn det andre tallet.
8. et tallpar som har produkt større enn et av tallene og samtidig er mindre enn det andre tallet.
9. et tall mindre enn 5 som kvadrert blir større enn 25.
10. en likning med løsning som ikke er et heltall.
11. en likning til en rett linje som ikke er avhengig av x.
12. en hendelse med to utfall hvor sannsynligheten til hver av dem ikke er en halv.
13. to hendelser, hvor sannsynligheten for at begge utfall inntreffer ikke er produktet av sannsynligheten for enkelthendelsene.
14. to vinkler som spenner over den samme sirkelbuen og deler den samme korden, men som ikke er identiske.
15. En trekant, der den omskrevne sirkelens sentrum ligger utenfor selve trekanten
16. et par av lineære likninger som ikke har noen løsning.
17. en vinkel hvor sinus er lik 0,5 og som er større enn 90 grader.
18. en funksjon hvor grafen ikke går gjennom den første kvadranten.
19. en funksjon uten invers.
20. en eksponentialfunksjon som ikke øker i det uendelige.
21. en funksjon på formen f(x) = x^(1/n) slik at graf-plotteren (ikke) plotter inn punktene for alle verdiene av x i et spesifisert intervall fra a til b.
22. en 2 x 2 matrise uten invers.

7. Umulige konstruksjoner

Dersom hver oppgave har en løsning kan elevene få inntrykket av at ethvert spørsmål kan besvares. Det er derfor nyttig å blande inn oppgaver som faktisk er løselige, ikke bare oppgaver som virker umulige for eleven slik det ble vist til i forrige del. Den pedagogiske hensikten er ikke kun å påminne elevene om at de må være kritiske og stille spørsmål, men også å stimulere dem til å forklare hvorfor det er umulig. I hvert tilfelle kan eleven bli bedt om å finne flere umulige oppgaver slik som disse, som et skritt mot å argumentere for hvorfor det er umulig, og de kan også peke på rammene for når det er mulig eller umulig.

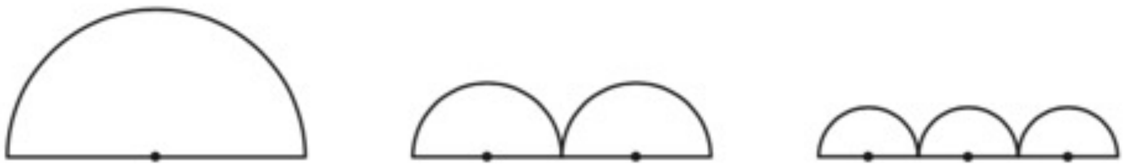
Gi, finn, konstruer et eksempel på:

1. en trekant med sidene 3, 4 og 8.
2. et oddetall og et partall som har sum som ikke er et oddetall.
3. en multippel av 6 som ikke er en multippel av 3.
4. et heltall som har 2 som siste siffer og et heltall som har 5 som siste siffer, som ganget sammen ikke har siste siffer lik 0.
5. et tall, på desimalform, som er mindre enn fire og større enn 3,9, og som ikke inneholder sifferet 9.
6. et tall på desimalform som ikke kan skrives som en brøk.
7. en sum av to brøker som ikke er en brøk.
8. et negativt primtall.
9. en figur med rotasjonssymmetri av 3 order og akkurat to linjer av refleksiv symmetri.
10. en tessellasjon av planet med kvadrater og regulære heksagoner.
11. en rotasjon som er ekvivalent til en refleksjon for alle objekter.
12. en hendelse med sannsynlighet større enn 1.
13. et kvadrattall med et partalls antall faktorer.
14. en tredimensjonal figur hvor et av hjørnene har seks likesidede trekanter som møtes.
15. en tredimensjonal figur der alle snittflatene er trekantet
16. et forholds-spørsmål som ikke involverer multiplikasjon eller divisjon.
17. to ikke-parallelle plan som aldri møtes.
18. et polynom med x som en variabel, der grafen har en uendelig gradient for noen endelige verdier av c.
19. en løsning til ligningen $\sin^2 x = 6$
20. en annengradslikning med en reell og en kompleks rot.
21. en kvadratisk funksjon med akkurat tre reelle røtter.

8. Umiddelbar generalisering

Her inviteres elevene til å generalisere ut ifra et enkelt eksempel. Disse er generiske i den forstand at de skal representere alle andre eksempler: det generelle kan "sees" gjennom det spesielle eksempelet. Når eleven oppdager det generelle, kan de bli bedt om å gi andre eksempler og forklare hvorfor deres formodning om det generelle er gyldig.

1. Hvis du er den **5**. i køen, da er det **4** mennesker foran deg.
2. 2**6** + 9 = 3**5**
3. **7**:37 pm = **19**:37
4. tallinje
5. 1456**7** - 44**7** = 1412**0**
6. **36** x 10 = **36**0 og 0,**36** x 10 = **3,6**0
7. 36 ganger 42 = 42 ganger 36 og 36 + 42 = 32 + 46
8. 3 - (3 - 2) = 2
9. 3 x (3 - 2) = 3
10. (3 - 1) - (3 - 2) = 2 - 1
11. 10 - (- **7**) = **17**
12. Hvis det er 5 like sannsynlige hendelser er sannsynligheten for hver av dem 1/5.
13. Hvis vi starter på 5 og teller med 3 hopp for hver gang, vil det 7. tallet være 5 + **6** x 3
14. (3 + 5)^2) = 3^2 + 5^2 + 2 x 3 x 5
15. (x + **3**)(x + **4**) = x^2 + (**3** + **4**)x + **3** x **4**
16. omkrets



17. 3° = 1
18. 28/99 = 0,2828282828 ....
19. sin20° = sin160°
20. y = (⅔)x er vinkelrett til y = -(3/2)x
21. 3y + 2x = 0 er vinkelrett til 2y - 3x = 0 og til 2y - 3x = 7

Ofte oppfordrer vi elever til å ikke generalisere ut ifra et enkelt eksempel, men det er likevel ofte noe matematikere gjør når de tydelig kan se en underliggende struktur. Slike generaliseringer kan bli behandlet som formodninger som kan begrunnes og argumenteres for.

9. Åpne og lukkede spørsmål / uttømmende lister

Åpne spørsmål inviterer til svar som har noe til felles, og det disse svarene har til felles er at de besvarer spørsmålet. Noen ganger vil det være et uendelig antall mulige svar og man kan i teorien lage en "uttømmende liste". Så hva er det som er generelt med alle de alternative svarene? Hva er det de har til felles, annet enn å svare på det originale spørsmålet? Hvordan kan vi uttrykke det generelt?

Lag en liste av og/eller beskriv det på en annen måte ...

1. alle par (samlinger) av tall som ender på sifferet 5 når du summerer dem
2. alle par av hele tall som har produkt hvor siste sifferet er 0
3. tallene som har 2 i rest når de deles med 5.
4. rektanglene som har et areal på 12,5cm^2
5. parallellogrammene som har en base lik 6 cm og et areal på 24cm^2
6. sekvensene som har tredje ledd lik 10.
7. forholdstall som er ekvivalente til 2:3.
8. de parene av kvadrattall der summen blir 1
9. tallene som har akkurat tre faktorer.
10. settene med fire tall som har en rekkevidde på 2 og en median lik 5
11. settene med data som har symmetriske stolpediagrammer.
12. firkantene som har diagonaler som har diagonaler som krysser hverandre vinkelrett.
13. gruppen av trekanter som har to sider der lengdeforholdet er 3:2, med tanke på forholdet mellom lengden av den tredje siden og lengden av de to andre sidene.
14. sentrum av sirkler som har to gitte linjer som tangenter.
15. de rette linjene som går gjennom punktet (4,5).
16. grafene som viser en reise tur på 1 km langs en rett vei i 10 minutter, uten å gå bakover.
17. verdiene for b som uttrykket x^2+bx+1 har reelle røtter for.
18. faktorene som b(x - 2)(ax^2 - 2ax - a) og (x^2 - 3x + 2)(ax - a)(bx + 2b) har til felles.
19. en annengradsfunksjon som går gjennom to spesifikke punkter, for eksempel (-1,2) og (3, -1)
20. vinklene som har sinus som ligger mellom ½ og 1⁄√2
21. en aritmetisk rekke der to av leddene er 4 og 6

10. Alltid, noen ganger, aldri sant

Denne typen spørsmål fokuserer på om en generell regel alltid er sann, aldri er sann eller noen ganger sann. Elever kan få konstruere tilfeller som illustrerer når det er sant og når det ikke er sant, og mer generelt, uttrykke hvilke forhold som må eksistere for at det skal være sant eller ikke sant.

1. 7 + 5 - 6 + 2 = er alltid 4.
2. Alle tall i 5-gangen ender på fem.
3. Et tall mindre enn ti pluss et tall mindre enn ti = et tall mindre enn ti
4. Et tall i andre kolonne i en hundre-kvadrat + et tall i den tredje kolonnen i et hundre-kvadrat = et tall i den femte kolonnen på et hundre-kvadrat.
5. Et partall delt på et partall = et partall
6. Et desimaltall - et desimaltall = et heltall
7. Å multiplisere et tall med ti er det samme som å legge til en 0 på slutten.
8. Divisjon gir alltid et mindre tall som svar.
9. Rektangler med de største arealene har de største omkretsene.
10. For hvilket som helst positivt tall er det et positivt tall som er større/mindre.
11. En firkant med fire like sider er en rombe.
12. En heksagon med like sider er regulær.
13. $x + 7 = 10$
14. $x + y = 6$
15. $x + 3{,}6 = y + 3{,}6$
16. $3x = 24$ og $x + y = 16$
17. Den resiproke til det resiproke tallet er det samme som tallet i seg selv.
18. Å kvadrere et tall gjør det større.
19. Kvadratet til en kvadratrot av et tall er det samme tallet.
20. Kvadratroten til kvadratet av et tall er det samme tallet.
21. Kvadratet på den største siden i en trekant er lik summen av kvadratene til de to mindre sidene.
22. Mellom alle to tall er det et rasjonalt tall.
23. Mellom to vilkårlige reelle tall er det et rasjonalt tall.
24. Gjennomsnittet til en frekvensfordeling ligger innenfor ett standardavvik fra gjennomsnittet av ekstremverdiene.
25. $\text{Sin}2x = 2\sin x$

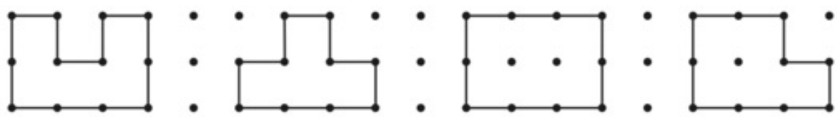
Alle eksemplene foreslått i "forvirrende forventninger" eller "umulige konstruksjoner" kunne også ha blitt tilpasset og brukt her også. For eksempel:

26. summen av to oddetall og et partall er et partall.
27. et tall multiplisert med 10 er ikke det samme tallet som seg selv.

11.Hvem skal ut?

Her kan eksemplet som skiller seg ut peke på det generelle ved de andre eksemplene. Et moteksempel kan være "sandkornet" som produserer "generaliseringens perle". Elevene får avgjøre hvilken som skal "ut", for så å lage flere eksempler som er like de to andre, og flere som er lik den som skiller seg ut. De kan også argumentere for at ulike elementer skal ut. Når frøet er sådd er det også ytterligere muligheter for å utvide denne aktiviteten ved å invitere elever til å lage sine egne lister.

1. Hvilken tallfølge skiller seg ut, og hvorfor?
   2, 5, 8, 11, ...
   6, 9, 12, 15, ...
   7, 10, 13, 16, ...
   34, 37, 40, 43, ...
   -4, -1, 2, 5, ...
2. Hvilken utregning skiller seg ut, og hvorfor?
   3 x 10 = 30
   31 x 10 = 310
   423 x 10 = 4230
   0,3 x 10 = 3
   1111 x 10 = 11110
3. Hvilken utregning skiller seg ut, og hvorfor?
   2/3 x 5/7 = 10/21
   5/4 x 3/14 = 15/56
   4/3 x 6/7 = 8/7
   1/13 x 7/9 = 7/117
   7/3 x 7/3 = 49/9
4. Hvilken utregning skiller seg ut, og hvorfor?
   2/5 + 3/5
   11/16 + 5/16
   1/9 + 8/9
   4/17 + 12/17
   4/11 + 7/11
5. Hvilket gjennomsnitt av disse settene av tall skiller seg ut, og hvorfor?
   1, 3, 10
   2, 6, 7
   -1, 1, 15
   3.5, 4.2, 7.3
   135/13, 8/13, 4
6. Hvilket punkt skiller seg ut, og hvorfor?
   (3,7) (6,13) (-2, -3) (0,2) (10, 21)
7. Hvilken figur skiller seg ut, og hvorfor?



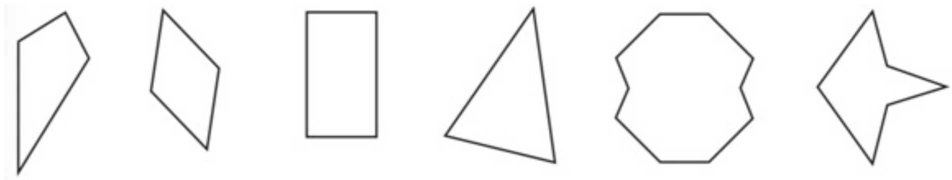
8. Hvilken funksjon skiller seg ut, og hvorfor?
   $y = x^2$
   $y = \cos x$
   $y = x^3$
   $y = x^4$
9. Når man skal finne ut de ukjente vinklene i disse rettvinklede trekantene, hvilken av trekantene skiller seg ut, og hvorfor?

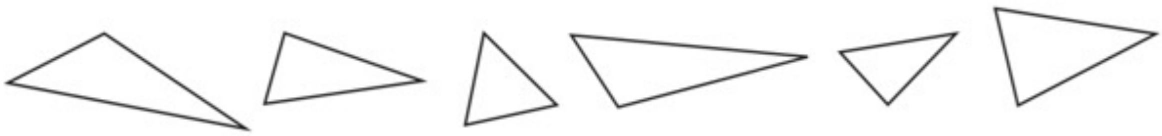
10. Hvilket av disse uttrykkene skiller seg ut, og hvorfor?
    $x^2 + 7x + 12$
    $x^2 + 7x + 13$
    $x^2 + 7x + 14$
    $x^2 + 7x + 15$
    $x^2 + 7x + 16$
11. Hvilket av disse uttrykkene skiller seg ut, og hvorfor?
    $x^2 + 6x + 5$
    $x^2 - 5x + 6$
    $x^2 + 6x - 5$
    $x^2 + 7x + 6$
    $x^2 - 7x + 6$
12. Hvilket tekstproblem skiller seg ut, og hvorfor?
    Hvor mange DVDer kan kjøpes for 700 kroner dersom hver av dem koster 139 kr?
    Hvor mye koster det å sende 5 tekstmeldinger når pris pr. tekstmelding er 0,10 øre?
    Hvor mange egg tilsvarer en vekt på 10kg?
    Hvor mange fullstendige omdreininger gjør minuttviseren mellom kl. 03.25 og 14.25

Elevene kan gjerne finne at flere av eksemplene skiller seg ut i hvert av disse spørsmålene, men den underliggende ideen er å fokusere på spesifikke forskjeller og likheter. Vi anbefaler uansett å ikke forholde seg til disse som om det finnes “riktige” svar.

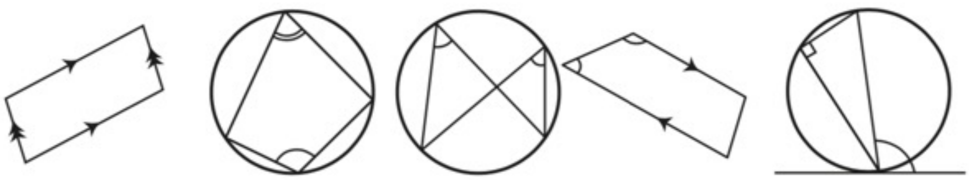
12. Sortering

I denne kategorien dreier det seg om at to sett med objekter som har forskjellige egenskaper blandes sammen. Oppgaven dreier seg om å sortere figurene tilbake til de to settene de tilhørere og å legge til noen flere elementer i hvert sett. Elevene må altså gjenkjenne det generelle i de gitte eksemplene og så lage noen flere eksempler. Det kan være flere måter å skille figurene på, så også her er det viktig å ikke forvente bestemte svar - men heller oppmuntre til å tenke fritt.

1. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
2. 353, 378, 451, 502, 437, 549, 450, 449 (forslag: vurder å runde av tallene)
3. 
4. $20 \div 3$ $23 \div 3$ $25 \div 3$ $14 \div 3$ $7 \div 3$ $2 \div 3$ $1 \div 3$
5. $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{9}{100}$ $\frac{100}{99}$ $\frac{999}{100}$ $\frac{51}{7}$
6. 5% av 12 15% av 4 12% av 5 10% av 8 4% av 20 8% av 10 2% av 30
7. $\frac{4}{5}$ av $\frac{7}{24}$ $\frac{14}{5}$ av $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{5}$ av $\frac{3}{5}$ $\frac{2}{5}$ av $\frac{3}{5}$ $\frac{2}{5}$ av $\frac{3}{5}$ $\frac{2}{3}$ av $\frac{7}{30}$ $\frac{7}{10}$ av $\frac{2}{9}$
8. $2x + 3 = 10$ $3x + 2 = 10$ $2x + 53 = 60$ $6x + 3 = 19$
   $3x + 9 = 17$ $2x + 7 = 14$ $4x + 1 = 15$
9. $y = 2x + 5$ $5x - y + 3 = 0$ $3y = 9 + 6x$ $3y - 15x = 9$
   $5y = 25 + 25x$ $4x - 2y + 10 = 0$ $y = 5x + 3$
10. Sorter disse trekantene etter hvor høyden deres møtes



11. Sorter disse diagrammene



13. Organisere i rekkefølge

Å plassere noen gitte lignende objekter i rekkefølge kan avsløre forskjeller og likheter. De genererte sekvensene kan deretter utvides og utforskes. Det å plassere i rekkefølge kan gi bevissthet rundt rekkevidden av endringer ved visse egenskaper. Noen ganger kan læreren angi dimensjonen til variasjonen som bestemmer rekkefølgen; noen ganger kan elevene selv bestemme i hvilken rekkefølge de ønsker å plassere. I disse eksemplene overlater vi ansvaret med å finne råmaterialet til leseren.

1. Plasser tallene i rekkefølge etter hvor nærme de er 1.
2. Plasser spørsmålene i en øvelse slik at de er i stigende rekkefølge fra enkleste oppgave til vanskeligste oppgave (etter elevens mening).
3. Plasser trekanter i rekkefølge i henhold til størrelsen på deres største (minste) vinkel.
4. Omorganiser trekanter i forhold til forholdet av deres lengste side og deres korteste side.
5. Plasser i rekkefølge og så omorganiser en samling med brøker etter størrelsen på deres teller, størrelsen på deres nevner og brøkens verdi.
6. Plasser en sekvens av hendelser i rekkefølge etter deres sannsynlighet.
7. Plasser rektangler i rekkefølge etter deres omkrets, og omorganiser etterpå i rekkefølge etter deres areal.
8. Plasser tallene i rekkefølge etter hvor mange faktorer de har.
9. Organiser noen firkanter og spør så elevene hvordan disse er organisert.
10. Organiser noen polygoner i to forskjellige måter, og be elevene si hvordan disse er forskjellige fra hverandre.
11. Organiser og omorganiser tre eller flere sett med data etter deres gjennomsnitt, median og typetall.
12. Organiser grafer etter hvor bratte de er i et gitt intervall.
13. Organiser et sett med lineære algebraiske uttrykk etter hvilken verdi de vil ha gitt bestemte verdier for x. Utforsk hvordan rekkefølgen endres når x-verdien endres.
14. Organiser en gitt sekvens av påstander/utsagn for å lage et argument eller et bevis.
15. Organiser en mengde med polynomer etter hvor mange ganger de må deriveres for å bli en konstant.
16. Organiser en mengde med polynomer etter hvor mange ganger du må utføre subtraksjoner før du når en konstant differanse.
17. Organiser sekvenser etter hvor raskt de konvergerer (eller vokser uendelig).

14. Ekvivalente utsagn

Utsagn kan være logisk ekvivalente, eller de kan være de samme når de omorganiseres i henhold til matematiske regler. Det er viktig at elever kjenner igjen mange forskjellige måter å uttrykke det samme på. Trangen til å manipulere symboler oppstår ved å prøve å se hvorfor forskjellige uttrykk faktisk er likeverdige (alltid gir samme resultat).

1. Finn et utsagn som er ekvivalent til "3 er mindre enn 5"
2. Vis at "en mer enn en multippel av" er det samme som å ha en "rest lik 1 ved divisjon av".
3. Finn et utsagn som tilsvarer "a er et multiplum av b"
4. Finn et utsagn som tilsvarer "alle firkanter er rektangler"
5. Finn et utsagn som tilsvarer "tre angitte lengder kan være kantene til en trekant"
6. Vis at "tallfølgen er delelig med tre" tilsvarer "leddene i tallfølgen har den samme resten når de deles på 3"
7. Finn et utsagn som er ekvivalent til "$x + 5 = 2x - 7$"
8. Finn et utsagn som er ekvivalent til "$0,9 = 1$".
9. Finn et utsagn som er ekvivalent til "arealet til trekanten er halvparten så stort som arealet til et rektangel med samme grunnlinje og høyde."
10. Finn et utsagn som er ekvivalent til "en sirkel har et uendelig antall sider".
11. Finn et utsagn som er ekvivalent til "$\tan 45° = 1$".

15. Medstrøms eller kryssende?

Tanken her er at elever kan bli for opphengt i å generere svar til individuelle tekniske spørsmål og ikke bli bevisst på den generelle ideen som de egentlig jobber med. For eksempel kan de følge alle trinnene for å finne en vinkel i en rettvinklet trekant, gitt to sider, men det kan likevel hende at de ikke utvikler en forståelse for hva sinus, cosinus og tangens betyr. Ved å konstruere en sekvens av gjentagende oppgaver og deretter få elevene til å reflektere over dem, drar læreren oppmerksomheten mot den matematiske ideen.

Ved å være bevisst på hva som endrer seg og hva som forblir det samme, kan man klare å skille mellom formen på hvert av utsagnene, og mønsteret i de skiftende tallene kan utvides. Ved å uttrykke det generelle mønsteret i ord og/eller symboler utvikler man bevissthet om rollen generalisering har for læring av matematikk.

1. Utvid følgende tabell oppover og nedover (ved å følge mønsteret).
   Hva forteller hver av radene deg?

7 x 3 = 21	3 x 7 = 21	21 ÷ 7 = 3	21 ÷ 3 = 7
7 x 4 = 28	4 x 7 = 28	28 ÷ 7 = 4	28 ÷ 4 = 7
7 x 5 = 35	5 x 7 = 35	35 ÷ 7 = 5	35 ÷ 5 = 7

2. Utvid følgende tabell oppover, nedover og til begge sider (ved å følge mønsteret). Forutsi f.eks. hva som må stå i cellen som er 35 ganger til venstre og 6 celler opp fra den markerte cellen.

			4-1=3	5-1=4	6-1=5		
			4-2=2	5-2=3	6-2=4		
			4-3=1	5-3=2	6-3=3		

Merk at subtraksjon kan erstattes med andre operasjoner eller funksjoner som involverer to ting som endres.

3. Utvid hver av de følgende radene både fremover og bakover (ved å følge mønsteret), og vurder så hva hvert av utsagnene uttrykker generelt (avsløre mønsteret):

2 x (10 + 3) = 2 x 10 + 2 x 3	2 x (20 + 3) = 2 x 20 + 2 x 3	2 x (30 + 3) = 2 x 30 + 2 x 3
3 x (3 - 2) + 1 = $(3 - 1)^2$	4 x (4 - 2) + 1 = $(4 - 1)^2$	5 x (5 - 2) + 1 = $(5 - 1)^2$
(4 - 1) x (4 + 1) = 4 x 4 - 1 x 1	(5 - 1) x (5 + 1) = 5 x 5 - 1 x 1	(6 - 1) x (6 + 1) = 6 x 6 - 1 x 1
2 x (2 + 2) + 1 = $(2 + 1)^2$	3 x (3 + 2) + 1 = $(3 + 1)^2$	4 x (4 + 2) + 1 = $(4 + 1)^2$
(3 + 2) x (3 - 1) = 3^2 + 3 - 2	(4 + 2) x (4 - 1) = 4^2 + 4 - 2	(5 + 2) x (5 - 1) = 5^2 + 5 - 2

16. Begrave beinet

For å kunne gjenkjenne passende fremgangsmåter under eksamen eller midt i arbeidet med utfordrende problemer, hjelper det å bli kjent med de forskjellige mulighetene man har, da oppgaver man møter gjerne vil forsøke å skjule hvilke fremgangsmåter som er relevante.
Følgelig er det lurt at elevene selv får øve på å tilsløre eller komplisere et matematisk problem. Dette er også noe som vil avsløre hvilke dimensjoner av mulig variasjon elevene er klar over. Etterpå kan medelever få prøve å rekonstruere eller løse problemet.

Konstruer et eksempel som gjør det vanskelig å umiddelbart "se" at:

1. et produkt av brøker faktisk kan forenkles til tallet 2.
2. summen av to brøker faktisk er ⅓.
3. et par av vinkler som er vertikalt motsatte og har samme størrelse
4. et sett med tall hvor gjennomsnittet er 3,5
5. produktet av to gitte tall er en perfekt kube
6. svaret på en spesifisert beregning er et veldig lite tall.
7. to uttrykk som har et spesifisert uttrykk som deres eneste felles faktor.
8. løsningen på en likning med tre separate forekomster av x faktisk er x = 2.
9. grafene til et par likninger i samme plan skjæres i punktet (-2, -3)
10. en differanse mellom to kvadrater trengs for å faktorisere uttrykket.
11. et rasjonalt uttrykk som kan forenkles til x/y, og enda en som forenkles til (x+y)/(x-y)

Noen ganger er det effektivt å spesifisere kompleksiteten på en eller annen måte:

12. Konstruer en aritmetisk beregning med svaret -3, som benytter nøyaktig tre multiplikasjoner og et oddetalls antall subtraksjoner.
13. Konstruer en figur av rektangler som krever bruk av minst tre sub-rektangler for å beregne arealet ut ifra den gitte informasjonen.
14. Konstruer en konfigurasjon av linjesegmenter som krever tre bruksområder av Pythagoras for å beregne alle lengdene fra den gitte informasjonen.
15. Den totale verdien er 1 (eller x/y) for et uttrykk som teller og nevner selv er brøker for.
16. Konstruer et par tall som krever tre bruksområder av den euklidske algoritmen for å finne den største felles faktoren.

Læreren (eller eleven) kan også "skjule" løsningene ved å bare gi delvis informasjon:

17. Ved å bruke programvare for dynamisk geometri, skjuler du en likesidet trekant ved å bare vise konstruksjonene for toppunktene.
18. Bruk dynamisk geometri-programvare til å "skjule" en trekant, men avslør et utvalg på tre av de følgende egenskapene: medianene, høydene, halveringslinjer til vinklene eller midtnormalene til sidene. Bruk dette til å rekonstruere trekanten.

Bruke “tenkere” i form og rom

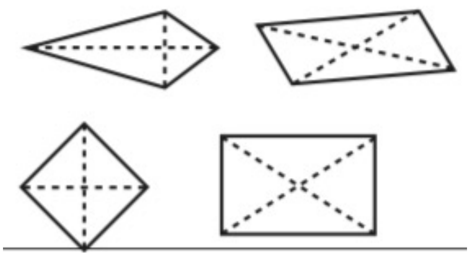
I denne delen viser vi hvordan de foregående ideene kan brukes i ethvert emne gjennom hele undervisningen - og ikke bare som en “forrett” eller oppgave i plenum eller som ekstrautfordringer, men som kjernen i undervisningen av et emne. Vi skal også illustrere hvordan hver type oppgave genererer litt forskjellig aktivitet hos eleven. For å gjøre dette har vi opprettet en oppgavesekvens som over flere år kan utvikle seg til geometriske bevis, transformasjonsgeometri og trigonometri. For at du enkelt kan trekke kryssreferanse til oppgavetyper, har vi brukt dem i den rekkefølgen de presenteres i dette heftet, og vi har brukt alle oppgavetypene. I praksis kan alle typer brukes i hvilken som helst rekkefølge, avhengig av hvilke intensjoner du har som lærer.

	Tenke type	*Hvorfor bruke denne oppgaven og hva resultatet muligens vil være*
1	Gi meg et eksempel på en trekant (kanskje tegne på små tusjtavler) … og enda en … og enda en	Elevene viser hvordan deres forestilling om trekanter er begrenset til å være standardiserte og “fine” trekanter, med en base som er parallell med bunnen av siden på arket/tavlen de tegner på. Informasjonen man kan få ut av denne ledeteksten er ikke bare en form for formativ vurdering for læreren ved starten av et tema; det oppmuntrer også til utvidelse av elevenes eksempelrom ved å skyve dem forbi deres første idé … de må utforske videre. De genererer dermed råmaterialet som man kan ta utgangspunkt i, i undervisningen, og man kan diskutere de uvanlige trekantene. De yngste elevene varierer ofte gjerne bare størrelsen og fargen, når de blir bedt om å “tegne enda en”, og ikke trekantens form.
2	Kan du lage en med sider som måler 6, 9 og 13 cm? (ved bruk av dynamisk geometriprogram og ved bruk av sirkler for å definere lengdene til en gitt trekant)	Elevene opplever gjerne problemet med å få endene til å møtes; bruk da sirkler for å bestemme lengder for å løse problemet! Frustrasjonen til elevene gjør at de opplever behovet for en bedre og enklere metode for å konstruere denne trekanten. De yngre elevene kan bli bedt om å tegne bestemte “spesielle” trekanter istedenfor, for eksempel “en likebeint trekant som ikke er likesidet”. Det er lett å undervurdere hva unge elever kan få til ved hjelp av digitale verktøy.

	Tenke type	*Hvorfor bruke denne oppgaven og hva resultatet muligens vil være*
	Tegn en trekant med en veldig lang side og en veldig kort side (eller en annen veldig "rar" trekant) Hvordan ville du ha hjulpet noen til å avgjøre om figuren er en trekant?	Denne ledeteksten utvider begrepet "normal" trekant til å omfatte "rare" trekanter; det utvider elevenes eksempelrom utover det mest åpenbare. Det kan også få frem "umulige" kombinasjoner av lengder, og dermed være en introduksjon til teoremet om trekantulikheten, dvs. at summen av to kortere lengder må være større enn den tredje lengden. Denne typen ledetekst følger naturlig fra forrige rad, når læreren merker at ingen av elevene gir visse eksempler. Gjennom å gruble over hvordan de ville forklart-hva en trekant er til andre genererer elevene sine egne definisjoner av "trekant" som fungerer for alle slags eksempler, dvs. en generell definisjon. Dette kan føre til en diskusjon rundt hvor lite informasjon som trengs for å avgjøre om det er en trekant eller ei, og samtale rundt ekvivalente utsagn (se rad 14).
3	Finn trekanter som er enkle eller vanskelige å tegne ved å bruke sirkler for å avgjøre lengdene. Finn firkanter som er enkle/vanskelige å lage ved bruk av to trekanter.	Yngre elever kan her benytte et sett med pinner med forskjellige lengder for å lage "enkle" eller "vanskelige" trekanter. Svarene deres på "hvorfor er dette en vanskelig trekant?" og "hvorfor er dette en enkel trekant?" vil være uttrykk for deres matematiske resonnement. Elevenes tolkninger av "enkelt" og "vanskelig" informerer ikke bare læreren om omfanget av deres kunnskap, men skyver dem også utover det åpenbare og implisitte, til å evaluere deres egen læring. De er nødt til å kunne konstruere deres egne eksempler; da noen elev-genererte eksempler viser seg å være uløselige. Elevene kan lage sitt eget sett med trekanter som de kan bruke til dette, enten fysisk, slik at de får en konkret "knagg" for å huske hva de har gjort, eller elektronisk. Denne genereringen av firkanter burde produsere et bredt utvalg.

	Tenke type	*Hvorfor bruke denne oppgaven og hva resultatet muligens vil være*
4	Finn noen lengder av trekantsider som hører til rettvinklede trekanter. Finn to trekanter som, når de blir satt sammen på en bestemt måte, utgjør en konkav firkant.	Hvis de bruker et sett med sidelengder som er heltall, vises 3, 4 og 5-trekanten snart. Hvis det har vært tidligere diskusjon om likhet (slik som kan oppstå fra ledetekst 1 ovenfor), kan andre genereres ved skalering. Ved hjelp av programvare kan de bestemme en rett vinkel, og lage trekanter basert på den med ikke-heltalls sider. Ideen om å bestemme en egenskap, for så å leke seg frem gjennom å variere de egenskapene som er mulige å variere, er mer nyttig enn å bare teste ut små tall og se hvilke trekanter som oppstår. Dette kan demonstreres, eller diskuteres, dersom det oppstår. Mye kan utvikle seg fra dette, for eksempel elev-genererte definisjoner av konkav, argumenter om vinkler, hvordan den indre vinkelsummen i polygoner kan bli funnet ut fra antallet trekanter som eksisterer i den, og så videre. Det kan gis en skriveramme for å modellere argumentet, "for at firkanten skal være konkav, må de to trekantene ha ..."; "Hvis to trekanter har …, må firkanten laget av …., være konkav fordi …"
5	Lag et polygon ved å sette sammen flere passende trekanter; … en som er lik den første, på en eller annen måte; … en som er forskjellig fra de første to.	Ved å bevege seg fra trekanter og firkanter til andre polygoner, kan denne aktiviteten føre til en rekke antagelser om vinkelsummer, symmetri, bruk av navn og egenskaper, osv. Settene av polygoner som opprettes kan brukes videre til sortering, klassifisering, og definering. Legg merke til forskjellen mellom å være "matematisk lik" (skalert) og "lik" gjennom å dele noen egenskaper, og hvordan å være matematisk lik er et spesielt tilfelle av å være lik på en eller annen måte. Denne ledeteksten utvider ledeteksten fra første rad i denne tabellen, ved at elevene overbevises til å se på egenskaper snarere enn hele objektet. Uansett hva de velger, vil deres oppfatning av mulige dimensjoner av variasjon bli benyttet. Når eleven skal lage polygon nr. 2 kan dette gjøres ved å bare endre en variabel, men i produksjonen av den tredje polygonen blir det nødt til å forholde seg til dimensjoner av mulig variasjon.

	Tenke type	*Hvorfor bruke denne oppgaven og hva resultatet muligens vil være*
6	Lag et polygon som er symmetrisk men ikke regulær. Lag et polygon som er regulær men ikke symmetrisk.	Dette paret av utfordringer tydeliggjør definisjoner, og de klargjør også forskjeller mellom rotasjons- og reflekterende symmetri. For å være presis, burde utfordringen ha uttalt hva slags symmetri som var nødvendig, men elevene må få oppleve tvetydigheten før de kan forstå betydningen av en slik presisering. Noen ganger viser det som først ser umulig ut, å faktisk være mulig! Denne ledeteksten er knyttet til den neste, som fokuserer på umulige objekter.
7	Lag en trekant som har median (eller høyder) som ikke møtes i et punkt. Lag et parallellogram hvor motstående vinkler ikke er like.	Elever som har jobbet med uvanlige eksempler på trekanter, kan oppfordres til å bruke et bredt spekter av eksempler til dette. Dynamiske geometriprogram kan gjøre dette arbeidet mer effektivt. Elevene oppgir her deres antagelser/formodninger. Det å svare på "hvorfor?" er i dette tilfellet litt vanskelig. Hvis bevis kreves kan "hvorfor går det ikke?" være et frempek mot et bevisargument. Man kan her hjelpe dem å strukturere argumentet ved å gi dem skriftlige eller muntlige rammer til å uttrykke seg med: "Jeg kan ikke lage … fordi … Så et parallellogram må ha .... fordi ..." Denne ledeteksten følger naturlig fra den forrige, og også fra rad 2, som pålegger gradvise begrensninger. Noen elever vil definere umulige gjenstander som deres "vanskelige" eksempler allerede i rad 3.
8	Hva kan du si om vinkler og parallelle linjer fra et sett av parallelle linjer og en tverrgående linje?	Elever som er vant til dynamiske demonstrasjoner kan generalisere fra et statisk diagram, spesielt hvis de fokuserer på hva som ville endret seg og hva som ville forblitt det samme. Merk at et bestemt skifte de må gjøre er å gå fra å se på individuelle elementer til å se på forholdet mellom dem. Dersom elevene er vant med å utforske og komme frem til formodninger, vil uttalelser om relasjoner lettere erstatte et fokus på individuelle elementer.

	Tenke type	*Hvorfor bruke denne oppgaven og hva resultatet muligens vil være*
9	Hvilke vinkler i diagrammet (av parallelle linjer og en tverrgående linje) har samme størrelse? Hva kan man si generelt om dette?	Ved å plukke ut alle de like vinklene bør man kunne bli oppmerksom på de generelle stedene der slike vinkler eksisterer. Elevene formulerer her deres egen versjon av det generelle. Deres beskrivelser kan være diagramspesifikke (slik som for eksempel å kalle like sett F- eller Z- vinkler, uten å innse at vinklene noen ganger ikke vil se ut som F- og Z-vinklene som er her.) I så fall kan man be dem om å finne noen "vanskelige" eksempler.
10	Er det alltid, noen ganger, eller aldri sant at arealet til kvadratene som hører til de to korteste sidene av en trekant summerer til å bli lik arealet til kvadratet til den lengste siden? Er det alltid, noen ganger eller aldri sant at a=b og b = c impliserer at a = c?	Pythagoras' læresetning dukker opp som et spesielt tilfelle av noen ulikheter. Mange eksempler, både i og utenfor matematikken, kan brukes av lærere og elever for å skape interesse for symboliseringer av logiske argument. Disse kan deretter brukes til å symbolisere geometriske argumenter.
11	Hvilken er det som skiller seg ut? 	Her kan det være mange gyldige svar, og elevene kan bli bedt om å konstruere sine egne sekvenser der det skal være en som skiller seg ut, basert på geometriske egenskaper, for så å presentere det til hele klassen.
12	Sorter noen figurer etter hvorvidt de har rotasjonssymmetri av order 1, 2 eller 4. Sorter noen teoremer etter hvorvidt de avhenger teoremer om parallelle linjer.	Dette hjelper å sortere ut "rotasjon" fra "refleksiv symmetri". Har former som har order 4 samtidig order 2? Dette er en mulighet til å ta en klassebeslutning om hvordan man skal behandle disse skillene, og hva en test-forfatter kan tenkte! Historiske sett er mange, faktisk de fleste, teoremer i skolegeometri avhengig (kanskje også veldig dypt avhengig) av det parallelle aksiomet. Dette kan derfor vekke interessant diskusjon. Ved å behandle teoremer som gjenstander det skal snakkes om, og ikke bare som øvelser for å bevise, får elevene hjelp til å bli kjent med konseptet bevis.

	Tenke type	*Hvorfor bruke denne oppgaven og hva resultatet muligens vil være*
13	Plasser noen rett-vinklede trekanter i rekkefølge etter forholdet mellom sidene deres. Plasser noen geometriske utsagn i en rekkefølge som utgjør et bevis.	"Rekkefølge" er her dårlig definert, så dette burde skape diskusjon om hvordan man skal sortere dem, og hvordan forholdet mellom sidene varierer med størrelsen på vinklene. Sinus, cosinus og tangens kan innføres som redskap til å sortere i rekkefølge. Dette gir økt bevissthet rundt hvordan bevis er bygget opp.
14	Når vi snakker om rettvinklede trekanter, gi en ekvivalent påstand til "likesidede trekanter er de trekantene som er slik at alle sider er like"; eller gi en ekvivalent påstand til "rette vinkler kan lages ved å forbinde endene av sirkelens diameter til et hvilket som helst punkt på omkretsen."	Når man det gjelder yngre elever vil det å lage ekvivalente utsagn gjerne dreie seg om å tegne de samme figurene eller diagrammene. For eldre elever bør ekvivalente utsagn gi muligheten til å resonnere fra en side til en annen i begge retninger. Det å se på ekstreme tilfeller (for eksempel der punktet på sirkelen sammenfaller med et endepunkt med diameteren) er viktig matematisk sett.
15	Regn ut den resterende vinkelen i disse trekantene: A=20 , B = 70 , C=? A=15 , B = 75 , C=? A=10 , B = 80 , C=? ... Hva har alle disse til felles. Uttrykk dette symbolsk.	Dersom elevene har vært fokuserte på å svare på noen velordnede spørsmål, ser de kanskje ikke det generelle mønsteret i det som blir spurt om; de fokuserer da på svaret istedenfor strukturene. Hvis de da blir utfordret til å se tilbake på arbeidet sitt, altså se det generelle, blir de gjerne mer fokuserte på strukturene.
16	Tegn et geometrisk diagram der alternative vinkler er veldig vanskelige å finne, men viktige for å finne de andre vinklene.	Spørsmål i lærebøker innebærer ofte å dele opp komplekse situasjoner for å finne svar. Hvis eleven selv erfarer å få alternative vinkler til å se uvanlige ut, kanskje uvanlig orientert, og som eksisterer i forvirrende forhold til andre vinkler, vil de gjerne enklere "få øye på dem" selv i fremtiden.

Vi antyder ikke at denne sekvensen av oppgaver er alt som kreves for å lære, men det kan bidra til at man kommer langt i utviklingen av matematisk (geometrisk) tenkning og forståelse. Utviklingen av disse gjør undervisning og læring av matematikk mer behagelig og enklere for elever, lærere og hjelpere. Leseren kan trolig se steder i sekvensen hvor det er muligheter for å ta ha fokus på ordforråd, flyt, nøyaktighet, muntlig, praktisk og fysisk arbeid, og så videre. Vi ønsker å rette oppmerksomheten mot det faktum at disse mulighetene kommer fra kraften disse spørsmålene har til å fremme diskusjon, aktivitet og argumentasjon, og at denne kraften kommer fra matematikken selv … hvis man begynner å reflektere over matematiske strukturer, trenger man ikke å kunstig tillegge disse pedagogiske egenskapene til arbeidet, de vokser naturlig fram fra det.

Hva nå?

Følgende avsnitt er en modifisert versjon av en artikkel som opprinnelig dukket opp i Mathematics Teaching (Watson 2003). Anta at det er stilt et spørsmål: hva nå? Hver av instruksjonene vi tilbyr, kan føre til øyeblikk i klasserommet hvor læreren raskt må bestemme seg for hva han skal gjøre. Hvis du gir elevene oppgaven med å generere ideene og råmaterialet som leksjonen dreier seg om, så kan du ikke kontrollere hva som vil skje på samme måte som om du hadde prøvd deg på å finne alle eksemplene selv. Og det gir ingen mening å få dem til å snakke, skape, diskutere og deretter ikke bruke det de produserer. Her er noen "hva nå" øyeblikk å vurdere.

En elev er i stand til å beskrive en generell formel som gjelder for en bestemt struktur og bruker den til å fylle ut en verditabell - hva nå?

En klasse har delt fem forskjellige metoder for å gjøre en delingsberegning i plenum - hva nå?

En klasse er blitt bedt om å lage spørsmål hvor svaret er 5, de har alle gjort det - hva nå?

En lærer har stil et åpent spørsmål og skrevet fem elevers svar på tavlen - hva nå?

I hver av disse finnes det potensiale til å forveksle type strategi med dens tiltenkte formål, med tanke på læring og det å gjøre matematikk. Spørsmålet, instruksjonen eller strategien alene gjør ikke noe mer enn å oppmuntre til sosial deltakelse og åpne opp for muligheter til videre arbeid.

En elev er i stand til å beskrive en generell formel som gjelder for en bestemt struktur og bruker den til å fylle ut en verditabell - hva nå?

Eleven anerkjenner at verditabellen er en vesentlig del av arbeidet, men for ham har tabellen ingen verdi ettersom at han allerede ser en generalisering. Det som er ment å fungere som et verktøy for generalisering, har blitt en slags rutine. Noen nyere undersøkelser av psykologer om induksjonsmetoder viser at systematisk generering av verdier ikke nødvendigvis bidrar til riktig induksjon - innsikt og utholdenhet er mer innflytelsesrike. En lærer kan feire elevens innsikt ved å foreslå å finne noen uvanlige verdier, for å knytte formelen til de opprinnelige dataene, for å utforske hva som kan skje med negative tall, for å finne opp strukturer som genererer relaterte formler. Men andre ord kan en besvarelse på "hva nå?" være å fortsette med å studere forholdet mellom slike formler og deres romlige og grafiske fremstillinger, deres vanlige og uvanlige oppførsel. Det som betyr noe er ikke formelen, men hvordan den ble konstruert ut ifra situasjonen.

En klasse har delt fem forskjellige metoder for å gjøre en delingsberegning i plenum - hva nå?

Du har kanskje sagt "nå er tiden ute". Deling kan utvide elevenes kunnskap om hva som er mulig, men de vil sannsynligvis måtte bearbeide det etterpå for å få en forståelse. Fokuset i en slik undervisningsøkt har gått fra å dreie seg om svaret til å dreie seg om metode, men dette nye fokuset kan forsvinne dersom man ikke setter av tid til å sammenligne de ulike metodene. Hvilke metoder er passende for hvilke typer tall? Hvilke er mest effektive? Hvilke er enklest/vanskeligst og hvorfor? Hvilke er lettest å spille inn? Hjelper opptak med nøyaktighet? Dessverre er deling på slutten av leksjonen sannsynligvis bare egnet til å oppfylle den sosiale funksjonen å få folk til å føle seg vellykket og involvert, eller som vurderingsfunksjon ved at det lar læreren få en innsikt i hva elevene har jobbet med. Man har gjerne delt hva man har jobbet med, men dette har ikke nødvendigvis ført til matematisk forståelse.

En klasse er blitt bedt om å lage spørsmål hvor svaret er 5, de har alle gjort det - hva nå?

Ideene som ligger til grunn for denne strategien er troen på at det å lage dine egne spørsmål hjelper deg med å svare på andres, og at å jobbe bakover hjelper deg med å forstå konsepter bedre enn å utføre algoritmer. Det er fremdeles mulig for eleven å gjøre det til en triviell oppgave ved å velge åpenbare og enkle alternativer. Det er heller ikke klart fra forskning at det å generere spørsmål for så å la jevnaldrende løse dem hjelper en i å løse spørsmål laget av andre, men det gir likevel læreren nyttig informasjon og det motiverer elevene til å jobbe. Nok en gang er det mulig å forveksle formen til spørsmålsstilling med dens funksjon, som er å engasjere elevene i matematiske konsepter. I en klasse skrev en elev:

5 + 0 =
0 + 5 =
1 x 5 =
5 x 1 =

Ingen kunne la den samlingen bare henge å dingle i luften! For eksempel kan man diskutere å bruke "5" som en plassholder for en generalitet. En annen måte å fortsette på her er å sammenligne og diskutere spørsmålene, og få elevene til å velge deres favoritt/den vanskeligste/ det mest uventede av spørsmålene de produserte og si hvorfor. En annen produktiv tilnærming er å sette noen begrensninger på spørsmålsstillingen slik at elevene må utforske konsepter for å produsere det som kreves. For eksempel, "svaret er 5, det er minst et negativt tall involvert, du kan ikke bruke addisjon, du må bruke hvert siffer minst en gang, det må være to brøker involvert …" og så videre. Dette gjør selvfølgelig en rask aktivitet til noe som kan trenge mye tanke og kalkulatorarbeid.

En lærer har stilt et åpent spørsmål og skrevet fem elevers svar på tavlen - hva nå?

Skillet mellom lukkede og åpne spørsmål er ikke til stor hjelp her. Det som er interessant er om en sekvens av spørsmål åpner for eller lukker muligheter for en elev, og om slik åpning eller lukking hjelper dem å lære matematikk. For eksempel er spørsmålet "gi meg et spørsmål som har 5 som svar" veldig åpent og kan følgelig være ganske uinteressant. Den gradvise elimineringen av muligheter som er foreslått ovenfor gjør den mer interessant, mer utfordrende, mer matematisk. Ved å eliminere noen av mulighetene åpner man samtidig for andre. Jo mer lukket det blir, jo flere nye muligheter tilbys: selv om det kan komme til et punkt hvor mer begrensning gjør ting for vanskelig og møter motstand. Hensikten med åpne spørsmål er å oppmuntre til tenkning og deltakelse, selv om ikke alle åpne spørsmål oppnår dette, og noen lukkede spørsmål kan generere mange tanker. Deltakelse i ustrukturerte åpne svar kan gjennomføres bare for det sosiale aspektet ved det. Det er rommet for å produsere ulike svar innenfor begrensninger som utfordrer elever til å være matematiske. I dette tilfellet kan elever bli bedt om å sortere svarene og si hvilke som er mest interessante matematisk, og hvorfor.

Hva nå? - Få dem til å tenke

I de fleste av våre forslag vil elevene få bedre matematisk forståelse gjennom å utforske muligheter av endring. I svært få av dem vil den første ideen de tenker på være et akseptabelt svar på utfordringen. Dette er fordi oppgavene generelt forventer at de første ideene skal bearbeides videre. Det skjer en endring fra å fokusere på hva man gjør i hvert enkelt eksempel, til å tenke på resultatene man kommer frem til som en klasse av objekter. Det kan for eksempel være et skifte fra å fokusere på å finne svaret, til å sammenligne, undersøke kontraster, sortere og å generalisere metoder; det kan være et skifte fra å finne en formel til å utforske gruppen av liknende formler; det kan være et skifte fra å gjennomføre multiplikasjoner, til å se på multiplikative strukturer mellom tallene; det kan være et skifte fra sosial deltakelse, til matematisk deltakelse. Fokuset er på å relatere objekter eller eksempler gjennom å sammenligne og å definere, og dermed lære om begreper klasser - de generelle ideene i matematikk. Dermed får elevene forståelse av sine matematiske opplevelser, ved å både gjøre matematikk og å se resultatene, ikke på en tilfeldig måte som et biprodukt av individuelt arbeid og klassearbeid, men på en strukturert måte i tråd med matematikkens strukturer.

Det er naturlig at denne typen tilnærmingskaper utfordringer i klasserommet. Hvordan kan en lærer håndtere klasser som diskuterer høylytt og genererer ideer? Hvordan kan læreren orkestrere alle ideene som produseres? Hvordan kan læreren sørge for at alle elevene deltar? Mange av oppgavene vi foreslår kan gjennomføres som skriftlige eller muntlige spørsmål, individuelle- eller gruppeoppgaver, slik at læreren kan tilpasse etter behov. De fleste av spørsmålene krever refleksjon over individuelle eksempler eller sett med eksempler for å kunne gjennomføres, heller enn å reflektere over dem i plenum med hele klassen. De fleste av dem krever en slags artikulering av en generalitet, selv om dette bare er gjennom å lage et 'typisk' eksempel. Mange av dem gir læreren innsikt i elevenes kunnskap og forståelse gjennom eksemplene de produserer.

Selvtilliten man får av å mestre noe på egenhånd kan bli brukt til å oppmuntre til organisert diskusjon i klasserommet, og selvtilliten som vokser fra å høre andre diskutere kan videre bli brukt til å støtte og gi ideer til elevenes individuelle arbeid. Vår erfaring er at når elevene får nok støtte og oppmuntring til å ta flere sjanser og å utfordre seg selv, vil den type spørsmål som krever grubling og vedvarende tanke føre til mer interessante leksjoner for alle, inkludert læreren.

Nyttige referanser og videre lesning

Bills, C. J. 2001. Metaphors and Other Linguistic Pointers to Children's Mental Representations. I C. Morgan & K. Jones (Eds.), Research in Mathematics Education Volume 3 : Papers of the British Society for Research into Learning Mathematics (s. 141- 154). London: British Society for Research into Learning Mathematics.

Bills, C. J., & Gray, E. M. 2001. 'Particular', 'Generic' and 'General' in Young Children's Mental Calculations. M. van den Heuval-Panhuizen (Red.), The 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2 (s. 153-160), Utrecht.

Bills, E. 1996. Shifting Sands: students' understanding of the roles of variables in 'A' level mathematics (unpublished PhD Thesis). Milton Keynes: Open University.

Bills, E. & Rowland, T. 1999. Examples, Generalisation and Proof. I L. Brown (Red.)

Making Meaning in Mathematics: a collection of extended and refereed papers from the British Society for Research into Learning Mathematics, Visions of Mathematics 2, Advances in Mathematics Education 1 (s. 103-116) York: QED.

Marton, F. & Booth, S. 1997. Learning and Awareness, Lawrence Erlbaum, Mahwah, New Jersey.

Marton, F. & Tsui, A. (Eds.) (2004). Classroom Discourse and the Space for Learning. Marwah, NJ: Erlbaum.

Mason, J. 2001. Tunja Sequences as Examples of Employing Students' Powers to Generalize, Mathematics Teacher, 94 (3) s. 164-169.

Mason, J. 2002. Minding Your Qs and Rs: effective questioning and responding in the mathematics classroom, i L. Haggerty (Red.) Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice, RoutledgeFalmer, London, s. 248-258.

Mason, J. 2002. Generalisation and Algebra: exploiting children's powers, i L. Haggerty (Red.) Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice, RoutledgeFalmer, London, s. 105-120.

Vighe, P. (2003). Pre-conceptions about the triangle. I J. Novotna (Red.) International Symposium Elementary Mathematics Teaching: proceedings (s. 152-157). Praha: Charles University.

Watson, A. 2003. 'Thenwhats' Mathematics Teaching 182 s. 3-5

Watson, A. & Mason, J. 1998. Questions and Prompts for Mathematical Thinking. Derby:

Association of Teachers of Mathematics.

Watson, A. & Mason J. 2000. Student Generated Examples, Mathematics Teaching 172, s. 59-62.

Watson A. & Mason, J. 2002. Student-Generated Examples in the Learning of Mathematics, Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 2 (2) s. 237-249.

Watson, A. & Mason, J. (2004) Mathematics as a Constructive Activity: the role of learner-generated examples, Erlbaum, Mahwah.

Watson, A. 2000, Going Across The Grain: mathematical generalisation in a group of low attainers, Nordisk Matematikk Didaktikk (Nordic Studies in Mathematics Education) 8 (1) s. 7-22.

Index

Tall

1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.15, 1.22, 1.242.1, 2.2, 2.3, 2.5, 2.6 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9
4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.14, 4.15, 4.16, 4.17
5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.7
6.2, 6.5, 6.6, 6.7, 6.8, 6.9
7.2, 7.3, 7.4, 7.5, 7.6, 7.7, 7.8, 7.13, 7.16
8.1, 8.2, 8.3, 8.4, 8.5, 8.6, 8.7, 8.8, 8.9, 8.10, 8.11, 8.14, 8.17, 8.18
9.1, 9.2, 9.3, 9.7, 9.8, 9.9
10.1, 10.2, 10.3, 10.4, 10.5, 10.6, 10.7, 10.8, 10.10, 10.17, 10.18, 10.19, 10.22, 10.23, 10.26, 10.27 11.2, 11.3, 11.4, 11.12
12.1, 12.2, 12.4, 12.5, 12.6, 12.7
13.1, 13.2, 13.8
14.1, 14.2, 14.9
15.1, 15.2, 15.3
16.1, 16.2, 16.5, 16.6, 16.12, 16.15

Form og rom

1.9, 1.16, 1.17, 1.18, 1.23, 1.26, 1.29, 1.30, 1.31, 1.32 2.4, 2.7, 2.11
3.10, 3.11, 3.17, 3.20, 3.22
4.7, 4.8, 4.10, 4.18, 4.19
5.6, 5.10
6.1, 6.3, 6.4, 6.14, 6.15
7.1, 7.9, 7.10, 7.11, 7.14, 7.15, 7.17 8.15, 8.19
9.4, 9.5, 9.12, 9.13, 9.14
10.9, 10.11, 10.12, 10.21
11.6, 11.7, 11.9
12.3, 12.10, 12.11
13.2, 13.3, 13.4, 13.7, 13.9, 13.10 14.4, 14.5, 14.10, 14.11
16.3, 16.14, 16.17, 16.18

Bevis

5.12
13.2, 13.14

Algebra

1.10, 1.12, 1.25, 1.27, 1.28 2.8, 2.9, 2.10

3.12, 3.14, 3.15, 3.16

4.9, 4.10

5.8, 5.9, 5.11

6.10, 6.11, 6.16, 6.18

8.13

9.6, 9.15, 9.16, 9.17 10.13, 10.14, 10.15, 10.16 11.1, 11.8, 11.10, 11.11 12.8, 12.9

13.2, 13.5, 13.12, 13.13 14.3, 14.6, 14.7

16.7, 16.8, 16.9

Håndtering av data

1.11, 1.19, 1.20, 1.21 3.18, 3.21

4.5, 4.6

6.12, 6.13

7.12

8.12, 8.15

9.10, 9.11

10.24

11.5

13.2, 13.6, 13.11 16.4

AS/A2

1.13, 1.14, 1.33, 1.34, 1.35, 1.36, 1.37, 1.38, 1.39, 1.40, 1.41, 1.42, 1.43, 3.23, 3.24, 3.25, 3.26, 3.27, 3.28, 3.29

4.10, 4.11, 4.12

5.13, 5.14, 5.15, 5.16, 5.17

6.17, 6.18, 6.19, 6.20, 6.21, 6.22 7.18, 7.19, 7.20, 7.21

8.20, 8.21

9.18, 9.19, 9.20, 9.21

10.25

13.2, 13.15, 13.16, 13.17 16.10, 16.11, 16.16

Tenkere

Laget og kompilert for ATM (Association of Teachers of Mathematics)
Av Chris Bills, Liz Bills, Anne Watson & John Mason

Først publisert i mars 2004 av Association of Teachers of Mathematics
Denne utgaven ble publisert i juni 2018

ATM ønsker å takke Rushey Mead Secondary School,
Leicestershire for deres bidrag til denne boken.

Association of Teachers of Mathematics
2A Vernon Street, Vernon House, Derby DE1 1FR Telephone: 01332 977891
e-mail: admin@atm.org.uk

Printed in England

ISBN 978-1-912185-14-6

Kopier kan kjøpes fra adressen over eller hos www.atm.org.uk

Tenkere

en samling av aktiviteter som utfordrer til matematisk tenkning

Disse ideene er passende for elever helt fra barneskolen til videregående.

Boka inneholder seksten forskjellige kontekster for eksemplifisering av det generelle og generalisering av det spesielle, hvilket er prosesser som er i hjertet av «å gjøre matematikk».

Det er eksempler på hvordan læreren kan bruke teknikkene i ethvert emne i matematikk. Dette er ikke .... aktiviteter, men de kan integreres i den daglige matematikkundervisningen for å skape en klasseroms kultur hvor elev-genererte eksempler åpner et vindu inn i matematikken, som vanligvis er lukket i arbeidet med tekstbokoppgaver.

«Tenkere» vil forbedre undervisningen og læringen av matematikk for nye og erfarne lærere, og for elever fra 8 til 18 år (og eldre).

Tenkere
en samling av aktiviteter som utfordrer til matematisk tenkning
ISBN 978-1-912185-14-6

Association of Teachers of Mathematics
Vernon House
2A Vernon Street
Derby DE1 1FR

Tel: 01332 977891

admin@atm.org.uk
www.atm.org.uk