

Eksamens

Emnekode: MA-218
Emnenavn: Lineær algebra

Dato: 15. desember 2016
Varighet: 9.00 - 14.00

Antall sider: 2

Tillatte hjelpeemidler: Ingen.

Merknader: Alle de 18 deloppgavene teller i utgangspunktet likt.
Alle svar skal grunngis.
Engelsk-norsk ordliste i lineær algebra vedlagt.

Lykke til ☺

Oppgave 1 (Litt av hvert)

La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad b = \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

- Finn nullrommet til A .
- Vis at kolonnevektoren $p = [1 \ -1 \ 3 \ 2]^T$ ($T =$ transponert) er en løsning til matriselikningen $Ax = b$. Finn alle løsningene til $Ax = b$.
- Forklar hva som menes med en *basis* for et endelig dimensjonalt vektorrom.
- Finn en basis for kolonnerommet, og en for radrommet, til A .

La $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ være transformasjonen gitt ved $Tx = Ax$.

- Bestem m og n .
Avgjør om T er onto \mathbb{R}^n .

Oppgave 2 (Lineær uavhengighet og underrom)

- Hva vil det si at en endelig mengde av vektorer i et vektorrom er lineært uavhengige?
- Avgjør om følgende mengder av vektorer er lineært uavhengige:

i) $M_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ i \mathbb{R}^3 .

ii) $M_2 = \{1+t, t-t^2, 2+t^2, t+2t^2\}$ i \mathbb{P}_2 . (Betegnelsen \mathbb{P}_2 er forklart i Oppgave 4.)

- c) Hva menes med et underrom av et vektorrom?
- d) Avgjør om følgende mengder er underrom:
- $M_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$.
 - $M_4 = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 1\}$ hvor A er en 1×3 matrise.
- e) La A være en $m \times n$ matrise. Vis at delmengden

$$\text{Nul}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\},$$

av vektorrommet \mathbb{R}^n , oppfyller underromskriteriene.

Oppgave 3 (Diagonalisering)

- a) Hva vil det si at en kvadratisk matrise A er diagonalisert?
- b) Vis at egenverdiene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -6 \\ -1 & 6 & -6 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

er 1 og 2.

- c) Avgjør om A er diagonalisert.

Oppgave 4 (Lineær transformasjon, matriserepresentasjon og koordinatisering)

- a) Hva vil det si at en transformasjon mellom to vektorrom er lineær?
La \mathbb{P}_2 betegne vektorrommet av alle polynomer av grad høyst 2. La $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ være standardbasisen for \mathbb{P}_2 . Definer transformasjonen $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ ved

$$T(p(t)) = tp'(t) + p(t-1)$$

hvor $p'(t)$ er den deriverte til $p(t)$.

- b) Vis at T er lineær.
c) Vis at $T(1) = 1$, og finn $T(t)$ og $T(t^2)$.
d) Forklar hvorfor matrisen til T relativt til basisen \mathcal{B} er gitt ved

$$M_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Avgjør om T er en isomorfi.

Gitt basisen $\mathcal{C} = \{t-2, t+2, 2t^2\}$ for \mathbb{P}_2 .

- e) La $q(t) = 1 - t + 2t^2$. Finn $[T(q(t))]_{\mathcal{C}}$ (dvs. $T(q(t))$ koordinatisert med hensyn på basisen \mathcal{C} .)

Engelsk - norsk ordliste i Lineær algebra

Oppdatert: 02.12.2009

A

A matrix in echelon form – Trappematrise
Algebraic multiplicity – Algebraisk multiplisitet
Attractor – Attraktor
Augmented matrix – Totalmatrise

B

Basic variable – Ledende ukjent

C

Change of basis - Basisskifte
Change-of-coordinates matrix – Koordinatskiftematrise (Basisskiftematrise)
Change of variable - Variableskifte
Characteristic equation – Karakteristisk likning
Characteristic polynomial – Karakteristisk polynom
Codomain – Verdiområde
Coefficient matrix – Koeffisient matrise
Cofactor expansion – Kofaktorutvidelse
Column – Kolonne
Column space – Kolonnerom
Composition - Sammensetning
Commute – Kommutere
Continuous dynamical system – Kontinuerlig dynamisk system
Contraction – Kontraksjon (Forminsking)
Coordinate mapping – Koordinatavbildning(transformasjon)
Cross-product term - Kryssproduktledd

D

Decouple – Dekople
Diagonalizable – Diagonalisable
Differential equation – Differensielllikning
Dilation – Dilatasjon (Forstørring)
Discrete dynamical system – Diskret dynamisk system
Distinct – Distinkt (Forskjellig fra)
Domain – Definisjonsmengde
Dot product - Prikkprodukt
Dynamical system – Dynamisk system

E

Echelon form – Trappeform
Eigenfunctions - Egenfunksjoner
Eigenvalue – Egenverdi
Eigenspace – Egenrom

Eigenvector – Egenvektor

Eigenvector decomposition – Egenvektordekomposisjon

Elementary matrix – Elementær matrise

Equation – Likning

Evolution – Utvikling

F

Finite dimensional vectorspace – Endelig dimensjonalt vektorrom

Free variable – Fri variabel

Fundamental set of solution – Fundamental løsningsmengde

G

General solution – Generell løsning

Geometrical multiplicity – Geometrisk multiplisitet

H

Homogeneous linear equation – Homogen lineær likning

I

Image (of x) – Bilde (av x)

Infinite dimensional vectorspace – Uendelig dimensjonalt vektorrom

Inhomogeneous linear equation – Innhomogen lineær likning

Initial value problem – Initialverdiproblem

Inner product – Indreprodukt (Prikkprodukt)

Isomorphism – Isomorfi

L

Leading entry – Lederelement

Leading 1 – Lederener

Linear combination – Lineær kombinasjon

Linear (in)dependence – Lineær (u)avhengighet

Linear transformation – Lineær transformasjon

M

Mapping - Avbildning

Matrix – Matrise

Matrix composition – Matrise sammensetning

Matrix equation – Matriselikning

Matrix of the quadratic form – Matrisen til en kvadratisk form

Matrix-Vector product – Matrise – vektorprodukt

Matrix transformation – Matrisetransformasjon

N

Nontrivial solution – Ikke-triviell løsning
Norm – Norm (Lengde)
Normalizing – Normalisere
Null space – Nullrom
Nullity – Nulliteten (Dimensjonen til nullrommet)

O

One-to-one – Injektiv (en – til – en)
Orthogonal – Ortogonal (Vinkelrett på)
Orthogonal complement – Ortogonalkomplement
Orthogonally diagonalizable – Ortogonalt diagonaliserbar
Orthogonal matrix – Ortogonal matrise
Orthogonal projection – Ortogonalprojeksjon
Orthogonal set - Ortogonal mengde
Orthonormal set – Ortonormal mengde

P

Pivot – Pivot (Lederelementene i en trappematrise)
Power – Potens
Principal axes – Prinsipalakser
Projection matrix - Projeksjonsmatrise

Q

Quadratic form – Kvadratisk form

R

Range – Verdimengde
Rank – Rang
Reduced echelon form – Redusert trappeform
Repeller - Avviser
Row – Rad
Row reduction – Radreduksjon
Row space – Radrom

S

Saddle point – Sadelpunkt
Scalar – Skalar (reelt eller kompleks tall)
Similarity transformation – Similær transformasjon
Singular matrix – Matrise som ikke er invertibel
Soulution set - Løsningsmengde
Span – Lineært span
Spectral decomposition - Spektraldekomposisjon
Square matrix – Kvadratisk matrise

Standard matrix – Standardmatrise
Subset - Delmengde
Subspace – Underrom (Delrom)
Surjective (onto) – Surjektiv (på)
Symmetric matrix – Symmetrisk matrise

T

Trajectory – Bane (Trajektorie)
Transformation – Transformasjon (funksjon)
Translation – Forflytning (Translasjon)
Transpose - Transponert
Trivial solution – Triviell løsning
Triangular matrix – Triangulær matrise

U

Unit vector – Enhetsvektor

V

Vector equation – Vektorlikning
Vectorspace – Vektorrom

Z

Zero matrix – Nullmatrise
Zero subspace – Underrommet som består bare av nullvektoren
Zero vector – Nullvektor