

Eksamens

Emnekode: MA-218
Emnenavn: Lineær algebra

Dato: 3. desember 2019
Varighet: 9:00 - 14:00

Antall sider: 2

Tillatte hjelpeemidler: Kun skrivesaker

Merknader: Alle deloppgaver teller i utgangspunktet likt.
Alle svar skal grunngis.
Engelsk-norsk ordliste i lineær algebra er vedlagt.

Lykke til ☺

Oppgave 1 (Litt av hvert)

Gitt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ og } b = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Løs matriselikningen $Ax = 0$.
(b) Vis at $Ap = b$ der $p^T = [1 \ 1 \ 1]$ (dvs. p transponert).
Finn løsningsmengden til matriselikningen $Ax = b$.

La B være matrisen $[A \ b]$, dvs. matrisen vi får når vi utvider A med kolonnevektoren b .

- (c) Finn en basis for kolonnerommet, $\text{Col}(B)$, og en basis for radrommet, $\text{Row}(B)$, til B .
La $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ være den lineære transformasjonen gitt ved $T(x) = Bx$.
(d) Bestem m og n . Avgjør om T er onto og om T er 1-1.
(e) Definer begrepet *dimensjon* til et vektorrom.
Finn dimensjonen til kjernen, $\ker(T)$, til T .

Oppgave 2 (Egenvektorer, egenverdier og diagonalisering)

- (a) Hva vil det si at en matrise er *diagonaliserbar*?
(b) En 2×2 matrise A har egenverdier 3 og 4 med korresponderende egenvektorer

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Finn matrisen A .

Gitt matrisen

$$B = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

- (c) Vis at egenverdiene til B er 1 og -1 .
(d) Finn egenvektorene korresponderende til disse egenverdiene.
(e) Finn matrisen B^{100} .
For hvilke $n \in \mathbb{N}$ er $B^n = I$, der I er identitetsmatrisen av størrelse 2×2 ?

Oppgave 3 (Underrom og lineær uavhengighet)

- (a) Hva må være oppfylt for at en mengde U av et vektorrom V er et *underrom* av V ?
- (b) Avgjør om følgende mengder er underrom:
- $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = x_3\}$.
 - $M_2 = \{A \in M_{2 \times 2} : A^T = -A\}$ der $M_{2 \times 2}$ er vektorrommet av alle 2×2 matriser.
- (c) La v_1, v_2, \dots, v_n være vektorer i et vektorrom V . Vis at mengden $\text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ er et underrom av V .
- (d) Hva vil det si at en mengde vektorer i et vektorrom er *lineært uavhengige*?
- (e) Avgjør om følgende mengder av vektorer er lineært uavhengige:
- Vektorene
- $$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$
- Matrisene
- $$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}.$$

Oppgave 4 (Matrisen til en lineær transformasjon)

- (a) Definer begrepet *lineær transformasjon*.

La \mathbb{P}_n være vektorrommet av polynomer av grad høyst n der n er et naturlig tall. La $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_3$ være transformasjonen som er gitt ved

$$T(p(t)) = tp(t) + t^2 p''(t)$$

der $p''(t)$ er den dobbeltderiverte til polynomet $p(t)$.

- La $p(t) = 1 + 2t + 3t^2$ og vis at $T(p(t)) = t + 8t^2 + 3t^3$.
- Vis at T er en lineær transformasjon.
- Finn matrisen til T relativt basisene $\mathcal{E}_2 = \{1, t, t^2\}$ for \mathbb{P}_2 og $\mathcal{E}_3 = \{1, t, t^2, t^3\}$ for \mathbb{P}_3 .
- Forklar hvorfor $\mathcal{B} = \{1 + t, 1 - t, t + t^2\}$ er en basis for \mathbb{P}_2 .
Finn matrisen til T relativt basisene \mathcal{B} for \mathbb{P}_2 og \mathcal{E}_3 (som i (d)) for \mathbb{P}_3 .

Engelsk - norsk ordliste i Lineær algebra

Oppdatert: 02.12.2009

A

A matrix in echelon form – Trappematrise
Algebraic multiplicity – Algebraisk multiplisitet
Attractor – Attraktor
Augmented matrix – Totalmatrise

B

Basic variable – Ledende ukjent

C

Change of basis - Basisskifte
Change-of-coordinates matrix – Koordinatskiftematrise (Basisskiftematrise)
Change of variable - Variableskifte
Characteristic equation – Karakteristisk likning
Characteristic polynomial – Karakteristisk polynom
Codomain – Verdiområde
Coefficient matrix – Koeffisient matrise
Cofactor expansion – Kofaktorutvidelse
Column – Kolonne
Column space – Kolonnerom
Composition - Sammensetning
Commute – Kommutere
Continuous dynamical system – Kontinuerlig dynamisk system
Contraction – Kontraksjon (Forminsking)
Coordinate mapping – Koordinatavbildning(transformasjon)
Cross-product term - Kryssproduktledd

D

Decouple – Dekople
Diagonalizable – Diagonalisable
Differential equation – Differensiallikning
Dilation – Dilatasjon (Forstørring)
Discrete dynamical system – Diskret dynamisk system
Distinct – Distinkt (Forskjellig fra)
Domain – Definisjonsmengde
Dot product - Prikkprodukt
Dynamical system – Dynamisk system

E

Echelon form – Trappeform
Eigenfunctions - Egenfunksjoner
Eigenvalue – Egenverdi
Eigenspace – Egenrom

Eigenvector – Egenvektor
Eigenvector decomposition – Egenvektordekomposisjon
Elementary matrix – Elementær matrise
Equation – Likning
Evolution – Utvikling

F

Finite dimensional vectorspace – Endelig dimensjonalt vektorrom
Free variable – Fri variabel
Fundamental set of solution – Fundamental løsningsmengde

G

General solution – Generell løsning
Geometrical multiplicity – Geometrisk multiplisitet

H

Homogeneous linear equation – Homogen lineær likning

I

Image (of x) – Bilde (av x)
Infinite dimensional vectorspace – Uendelig dimensjonalt vektorrom
Inhomogeneous linear equation – Innhomogen lineær likning
Initial value problem – Initialverdiproblem
Inner product – Indreprodukt (Prikkprodukt)
Isomorphism – Isomorfi

L

Leading entry – Lederelement
Leading 1 – Lederener
Linear combination – Lineær kombinasjon
Linear (in)dependence – Lineær (u)avhengighet
Linear transformation – Lineær transformasjon

M

Mapping - Avbildning
Matrix – Matrise
Matrix composition – Matrise sammensetning
Matrix equation – Matriselikning
Matrix of the quadratic form – Matrisen til en kvadratisk form
Matrix-Vector product – Matrise – vektorprodukt
Matrix transformation – Matrisetransformasjon

N

Nontrivial solution – Ikke-triviell løsning
Norm – Norm (Lengde)
Normalizing – Normalisere
Null space – Nullrom
Nullity – Nulliteten (Dimensjonen til nullrommet)

O

One-to-one – Injektiv (en – til – en)
Orthogonal – Ortogonal (Vinkelrett på)
Orthogonal complement – Orthogonalkomplement
Orthogonally diagonalizable – Ortogonalt diagonaliserbar
Orthogonal matrix – Ortogonal matrise
Orthogonal projection – Ortogonalprojeksjon
Orthogonal set - Ortogonal mengde
Orthonormal set – Ortonormal mengde

P

Pivot – Pivot (Lederelementene i en trappematrise)
Power – Potens
Principial axes – Prinsipalakser
Projection matrix - Projeksjonsmatrise

Q

Quadratic form – Kvadratisk form

R

Range – Verdimengde
Rank – Rang
Reduced echelon form – Redusert trappeform
Repellor - Avviser
Row – Rad
Row reduction – Radreduksjon
Row space – Radrom

S

Saddle point – Sadelpunkt
Scalar – Skalar (reelt eller kompleks tall)
Similarity transformation – Similær transformasjon
Singular matrix – Matrise som ikke er invertibel
Soulution set - Løsningsmengde
Span – Lineært span
Spectral decomposition - Spektraldekomposisjon
Square matrix – Kvadratisk matrise

Standard matrix – Standardmatrise
Subset - Delmengde
Subspace – Underrom (Delrom)
Surjective (onto) – Surjektiv (på)
Symmetric matrix – Symmetrisk matrise

T

Trajectory – Bane (Trajektorie)
Transformation – Transformasjon (funksjon)
Translation – Forflytning (Translasjon)
Transpose - Transponert
Trivial solution – Triviell løsning
Triangular matrix – Triangulær matrise

U

Unit vector – Enhetsvektor

V

Vector equation – Vektorlikning
Vectorspace – Vektorrom

Z

Zero matrix – Nullmatrise
Zero subspace – Underrommet som består bare av nullvektoren
Zero vector – Nullvektor